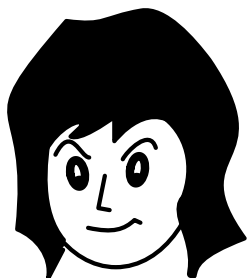
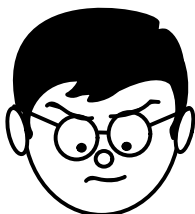


マチ子先生



と

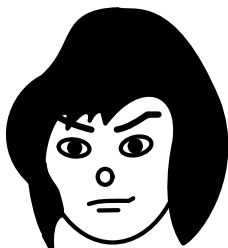
トボ僧



の

ちょっとむずかしいけど役に立つ

算数物語



私

ホロ



まえがき

この物語に登場するダイキ君（トボ僧）はちょっと変わった男の子です。最近よく耳にする言い方をすると、個性豊かな子と言えます。何かを考えることに夢中になると、周りのことに気が回らなくなり、声を掛けられても気が付かないほどです。声を掛けた人は無視されたようないやな気分になりかねません。そうしたことで、仲間とのコミュニケーションがうまくとれずに、仲間外れにされたり、時にはいじめられたりもします。

一方ダイキ君は、めったにお目にかかれないような際立った才能を持ち合わせています。算数（数学）の問題を理解し新たに発想する能力です。どのような才能かは本文をお読みいただくとして、ここで1つ触れておきたいのは、世の中には、時として身近なところに、このような子ども・大人がいるということです。

走るのが得意だったり、虫が苦手だったり、手先が器用だったり、涙もろかったり、すべての人が様々な個性を持ち合わせているように、ダイキ君の性格や能力も生まれつきのものです。本人の責任でも育った環境のせいでもありません。そのような個性をお互いが理解し認め合い、信頼し合えるようになって、誰もが生きやすい世の中になってほしいものです。

もしも今現在、あるいはこの先、ダイキ君のような人（才能はともかく性格が）に出会ったらこの物語を思い出してください。

本文はダイキ君のお姉さんのマキさんにお問い合わせしました。（もちろん物語上のことです・・・）

むずかしくてわからないところは気にせずとばしてください。学年が進むと、いずれわかるようになるものです。

マチ子先生とトボ僧の算数物語

目次 (ページは、2 ページ見開きにしたときに表示されるページ)

- 0) マチ子先生との出会い 5 ページ
- 1) 平行線の同位角はなぜ等しいのか 13 ページ
- 2) 3×3 の魔方陣を解く 23 ページ
- 3) 10 本の棒で 5 個のばってんを作る 37 ページ
- 4) 将棋倒しからハノイの塔を考える 51 ページ
- 5) 9L と 7L のマスで 1 L を作る 67 ページ
- 6) 天びんで重さの異なるものを見つける 77 ページ
- 7) 6 個の点を 2 色の線で結ぶと 95 ページ
- 8) 背に天使の羽は生えたか 107 ページ
- 9) リングつき柱にひもをかける 127 ページ
- 10) 回転しながら回転移動する 137 ページ
- 11) ピタゴラスの定理を証明する 149 ページ
- 12) 時計の長針と短針が重なるのは 163 ページ
- 13) 最短経路は何通りあるか 175 ページ
- 14) 誕生日はなぜ重なるのか 187 ページ

コラム

見開きの右側の空いたページに次のコラムがあります。いずれも本文とは直接関係ありません。

◆ どうして $(-) \times (-)$ は $(+)$ なのか	6 ページ
◆ $3 \times 3 \times 3$ の立方体を作る	20 ページ
◆ どうして直角は 90° なのか	22 ページ
◆ 集合 (その 1)	34 ページ
◆ 集合 (その 2)	36 ページ
◆ 数を指数を用いて表す	50 ページ
◆ ペントミノ	76 ページ
◆ 色 (形) 合わせのパズル	92 ページ
◆ 「少なくとも 1 つ」「すべては～でない」の意味	104 ページ
◆ 自然数の平方根	160 ページ
◆ 「無限」のふしぎ	172 ページ
◆ 順列と組合せ	184 ページ
◆ 確率の例題	198 ページ
◆ $1 + 2 + 3 + \dots + n$ のうまい計算法	200 ページ

0) マチ子先生との出会い * * * * * * * * * * * * * * * * *

私はエンドウマキ、現在中1でもうすぐ14歳になる。弟のダイキは小4で10歳。ダイキはちょっと変わった子で、人との付き合いが苦手なせいで学校へ行けてない。だけど特に算数(数学?)に関しては特異な才能を持っている。

私とダイキは犬のコロを連れていつもの散歩コースを歩き、いつもの公園に寄った。ダイキはすべり台のてっぺんに座って足を投げ出し、空を見上げて何やら考えている。いつものポーズだ。私はブランコにのり、足を地面につけて少しだけ揺すりながら、バス通りの向こうの、日がこれから沈んでいきそうなあたりをボーッとながめていた。

「こんにちは」

突然、背後に女性の声が出た。振り返ると少し年配の女性がニコニコしながら立っていた。私はあわててブランコからおり、「こんにちは」と言って頭をペコリと下げた。

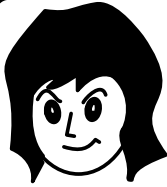
「ごめんなさい、おどろかせてしまったみたいね」

「いえ、そんなことはありません」

女性はあいかわらずニコニコしている。私たちと同じように散歩の最中のようなのだが、きれいにお化粧していて髪の毛もきちんと整い、身なりもそのまま街へ出かけられそうな、とても上品な感じの人だ。「あなたたちもお散歩?前にもあなたたちが歩く姿を二、三度見かけたことがあるわ」

そう言ってとなりのブランコの方へ行き、「私もブランコで休ませてもらおうかな、いいかしら?」と言った。

私のブランコでもないので、「どうぞ」と答えるのもおかしい気



どうして(-) x (-) は (+) なのか



(-) x (-) を (+) にするわけを考える

Aさんは、金券を3枚と

+100円 +100円 +100円

借金券を2枚持っている

-100円 -100円

財産は+100円

借金券は
捨てたり
破いたり
すると罰
せられる

Bさんは、金券を1枚と

+100円

借金券を4枚と

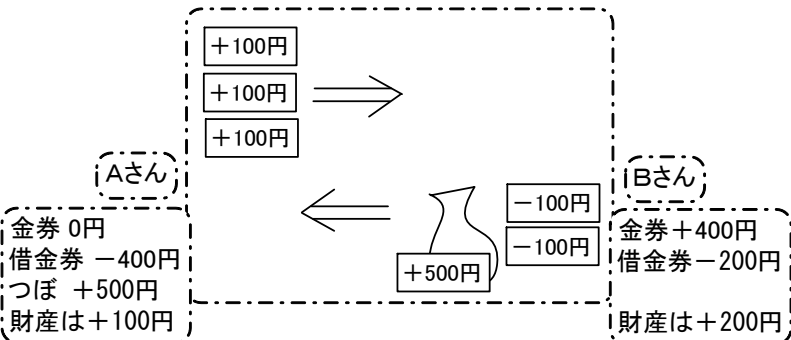
-100円 -100円 -100円 -100円

500円の値打ちのあるつぼを持っている

財産は+200円



AさんはBさんから500円をつぼを
買うことになった。金券は300円分
しかない。そこで、...



金券、借金券、品物が入ってくる(増える)を+、出ていく(減る)を-で表すと、2人ともプラス・マイナス 0であるためには

$$Aさん : (+100円) \times (-3) + (-100円) \times (+2) + (+500円) = 0円$$

$$Bさん : (+100円) \times (+3) + (-100円) \times (-2) - (+500円) = 0円$$

_____ の部分を+200円とすると、話が合う

がして、私は「はい」と返事した。私の気づかいなどおかまいなしに、女性は地面を蹴って大きくブランコを揺らせた。

「家は近くかしら？私の家はすぐそこ」

「はい、そこのバス通りを越えて少し山の方へ上ったところにある団地です。この住宅街が車もほとんど通らないしのんびり歩けるものですから」

女性は「そう」と言って、視線をダイキの方へむけながら、「弟さんね？何か考えごと？」と聞いてきた。

「はい、でも何を考えているのかわかりません」

ダイキは一度チラッとこちらに目を向けたようだったが、ほとんど意に介さず相変わらず空を見上げたままだ。

「声を掛けても大丈夫かしら？」

「はい、でも多分返事はないと思います」

「お名前は？」

「ダイキです」

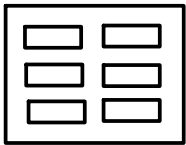
すると女性は「ダイキくん、こんにちは」と声をかけた。驚くほど大きな声だった。案の定ダイキは、声のする方にちょっと顔を向けただけで元の状態に戻った。

「いつもそうなんです」

私が申し訳ないという気持ちで言うと、女性は意外にもニコニコしながら、「そう」とだけ言った。そしてブランコを急停止させると、すたすたとすべり台の足元へ行き、「こんにちわ、ダイキ君。私はマチ子。よろしくね」と声をかけた。するとダイキがすべり降りてきた。マチ子さんは声を掛けたので降りてきたと思っただろうが、そうではなかった。下まで降りると、ダイキはすべり台の周り



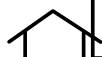
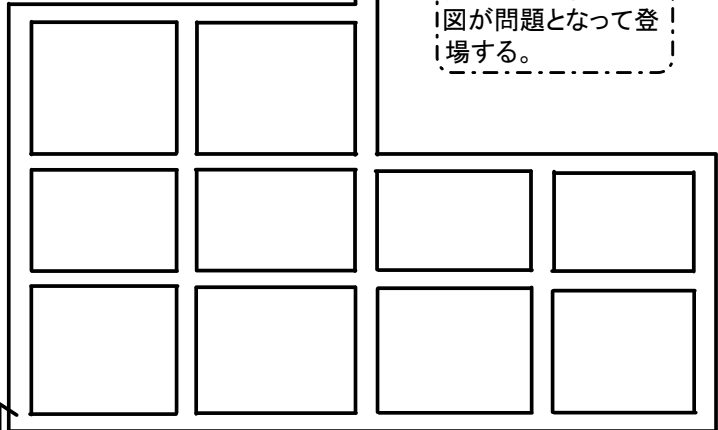
2人の家がある団地



バス通り



先へ行って、この地図が問題となって登場する。



マチ子先生の家

をぐるぐる歩き始めたのだ。マチ子さんがキョトンとして私の方を見ている。私はマチ子さんのところへ行って、そっと話した。

「ダイキは考えごとに夢中になると、歩き出すんです。たぶんまた算数の問題を考えているんです。ああやってトボトボ歩くんで、『トボ僧』って言うんです」

私が笑うと、マチ子さんもうなずきながら笑った。そしてダイキが目の前に来た時に声を掛けた。

「ダイキ君、ごめん。どんな問題考えてるの？私も算数の問題を考えるのが好きなんだけどな」

ダイキがもう一周したところで、マチ子さんが「どんな問題か教えてもらえないかな」と言った。ダイキが立ち止まってマチ子さんを見た。『算数の問題』に反応したのか、『教えて』に反応したのか。

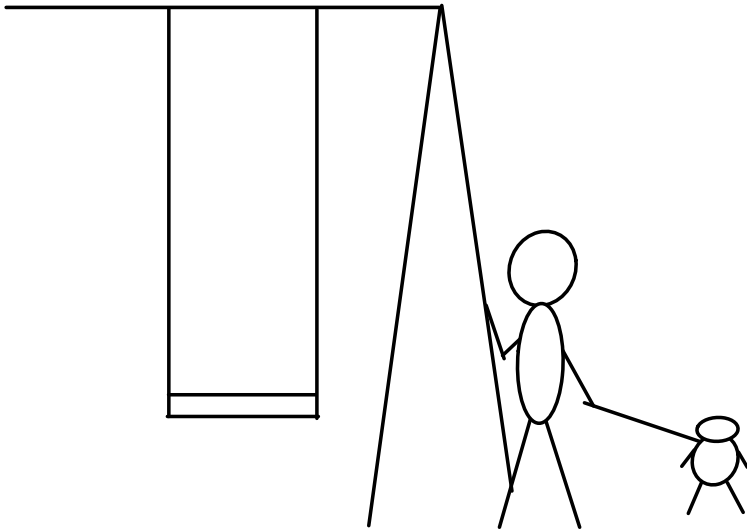
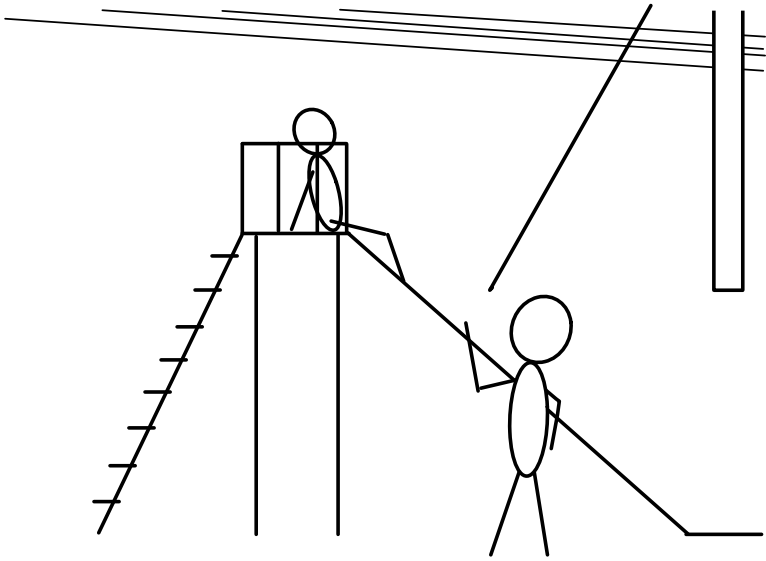
「ねえ、ダイキ君、教えてよ。何考えていたの？」

ダイキがなんと初対面の女性に語り始めた。

「向こうに高圧線の電線があります。そこに電柱の斜めの線があります。平行線の同位角はどうして等しいのか」

ダイキがさっきから見上げていた方に何本かの電線が水平に走り、公園のわきにある電柱を支える線がそれを突っ切るように見える。平行線とそれに交わる直線でできる同位角、錯角は等しい。ダイキは学校へ行ってないけど、何かの本で見て知っていたのだろう。『平行線の同位角が等しい？そんな当たり前のことで、どうしてダイキは悩んでいたんだろう』

ふとマチ子さんの方を見ると、マチ子さんはとても感心したように首を何度もたてに振りながらうなずいている。ダイキはそんなマチ子さんの様子を見て、少し気にかけているようだ。ダイキにはめ



ったにないことだ。

マチ子さんが「ダイキ君何年生？」と言い、ダイキが指を4本立てるのを見て、「4年生でそんなこと考えるの？」と一段と驚きをましたようにつぶやいた。私には2人のやり取りがさっぱりわからない。何故ダイキが平行線の同位角で悩み、マチ子さんが驚いているのか。

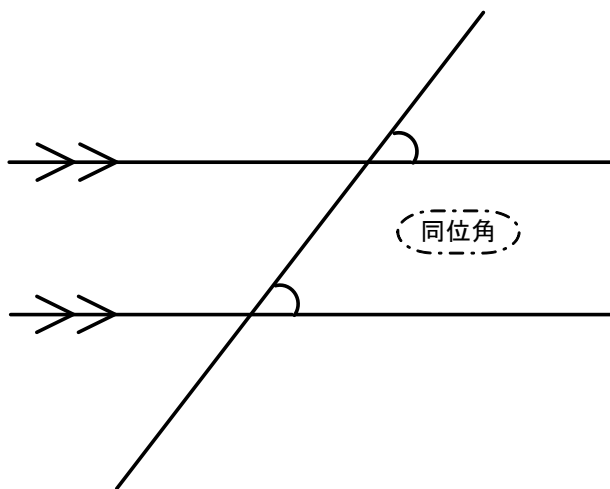
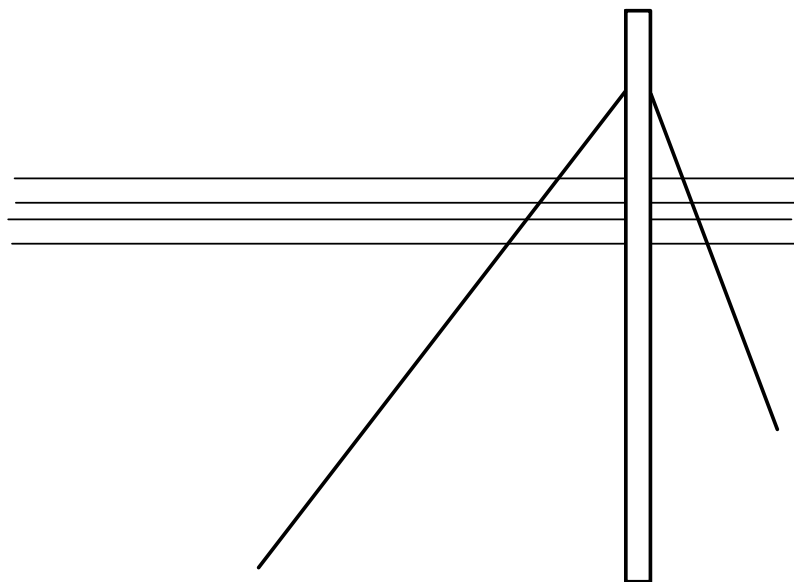
「ダイキ君、その問題、ゆっくり考えない？私の家すぐそこだから今度私の家で。今日はもう日が暮れそうだから」

マチ子さんの目が輝いている。ダイキの目はメガネ越しでよく分からないが、気持ちが高ぶっているのはわかる。

「私の家はね、この真ん中の道を上がった突き当りを右へ曲がってそのまた突き当り。水色の家よ。私はたいてい家にいるから、いつでもかまわないわ」

マチ子さんのペースで話がどんどん進んでいった。

こうして、公園でのこの出会いがきっかけとなって、マチ子さんとダイキの算数物語が展開することになった。



1) 平行線の同位角はなぜ等しいのか * * * * *

翌日ダイキとコロを連れてマチ子さんの家におじゃました。最初に通されたリビングには、テーブルとは別に窓際に大きな机があって、その隣にこれまた大きな本棚があり、その一角に高校の数学の教科書や問題集が並んでいた。

「マチ子さんはひょっとして高校の先生ですか？数学の」

「ええ、まあ。去年退職するまではね」

「じゃあ、マチ子先生だ」

「ううん、さんでいいのよ」

「マチ子さんよりマチ子先生の方が、呼びやすいし、似合っています。マチ子先生って呼ばせてください。ダイキもそう思うでしょう？」

ダイキは私たちの話はそっちのけで熱心に本棚を見ている。

「3人のやり取りはこの家の中だけだし、いいにしましょうか」

そう言って、マチ子先生はダイキのところへ行った。そして何やら2人のやり取りが始まった。私は「コロの様子を見てきます」と言って席をはずした。

私が戻ると、2人は平行線の話始めていた。

「『ユークリッド』って聞いたことあるでしょ？紀元前のギリシャの数学者だけど、今でも通用する幾何学の体系を作り上げたの。その人が一番悩んだのが平行線に関する事。平行線といえば図形の問題の最初に出てくるわよね。つまり出発点でつまづいたのね。昨日のダイキ君が悩んだまさしくそのことで悩んだのよ」

ダイキがマチ子先生の顔をしっかりと見て聞いている。『昨日ダイキの考えていたことがそんな大変な問題だったとは！』

「まず平面上の2本の直線が平行であるということを、どのように約束するかね。数学では『定義する』っていう言い方をするんだけど。ダイキ君は平行をどのように考えていたの？」

「2本の直線が同じ平面の上であって、どちらにのぼしても、どこまで行っても交わらない」

「そうね、それが一番わかりやすいわね。ほかにも定義の仕方があるけど、それでいきましょう。ユークリッドは2本の直線の平行について、次のように考えたの」

そう言ってマチ子先生は図を描きながら説明した。

「『2本の直線があって、それにもう1本別の直線が交わるとき、そこにできる内角の和が2直角でない、2直角より小さい側で元の2直線は交わる』と。ということは、内角の和がちょうど2直角になるときだけ元の2直線は交わらないと言ってるわけね。図を見るとわかるように、内角の和が2直角ということは同位角が等しいということですよ。だから、ダイキ君が昨日考えてたことは、まさしくこのことだったのね。平行になるのは同位角が等しいとき」

マチ子先生がそこまで話すと、ダイキがすかさず口をはさんだ。

「今のことって、証明できるんですか？」

「そこなのよ、ダイキ君」

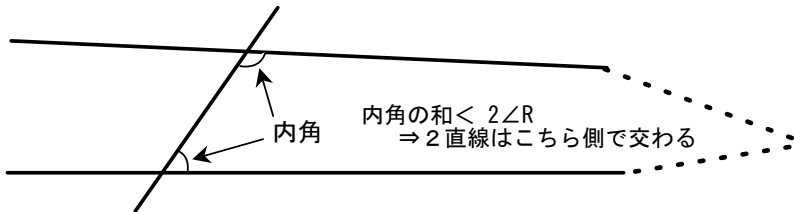
マチ子先生が強い調子で答えた。

「ユークリッドは、このごく当たり前に思えることを、証明できるはずだと考えて一生けん命取り組んだ。ところがどう考えても証明できない。これは証明できることではなく、みんな認め合うしかないことだと思いついた。それで「公理」という言い方をすることにしたの。『平行線の公理』よ」

ユークリッド：

紀元前300年頃のギリシャの数学者。幾何学の体系を作り上げた。
『ユークリッド幾何学』と呼ばれ、現在でも立派に通用する。

ユークリッドは2直線の平行に関して次のように考えた。



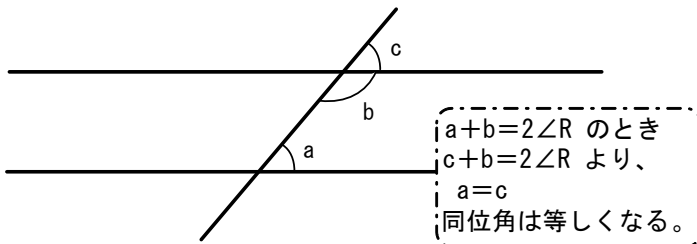
内角の和が2直角でないとき、和の小さい側で2直線は交わる。

ユークリッドは、このことを証明しようとしたが、証明できること
ではないことがわかった。 \Rightarrow 「公理」とした。



内角の和がちょうど2直角のときは交わらない（2直線は平行）。

内角の和が2直角（ $a+b=2\angle R$ ）のとき。



ダイキがうつむいて考え込んでいる。

「証明できることではない。だからみんなで認め合うしかない」

ダイキはそうつぶやくように言って続けた。「公理って他にどんなのがありますか？」

「そうね。例えば、 $A = B$ という等式があったとして、その両辺に同じものを加えたり、両辺から同じものを引いたりしても等号は成り立つ、なんていうのがそう。話を進めていくにあたって、みんなで認め合おうっていう、約束ごとみたいなものね。必要に応じていろいろ取り決めしていくの。平行線の公理も認め合うことにしたの」

ダイキが少し顔を上にあげてうなずいている。

「ところでね、この平行線の公理に関しては興味深い話があるわ。ユークリッドの平行線の公理は、別の分かりやすい言い方をすると、『直線外の点を通して直線に平行な直線は1本だけ引ける』ってなるんだけど、19世紀になってある数学者が、公理なら別の約束の仕方でもいいはずだと考えて、『直線外の点を通る平行線は1本も引けない』というのを公理にしたの」

ダイキが「へー！」と、奇妙な声を発した。「平行線が引けないんじゃ、何も話を進められないじゃないですか」

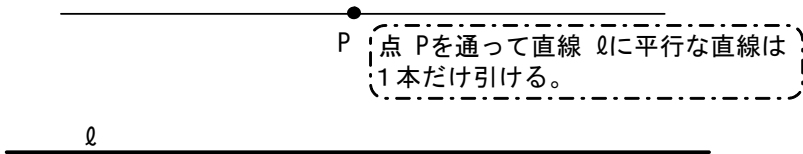
「それでも、その数学者はユークリッドと同じような幾何学の体系を作り上げたの。その幾何学では、たとえば、三角形の内角の和は 180° より大きくなるわ」

マチ子先生は、書棚の上にあった地球儀をとって説明した。

「球面上の幾何学というわけね。また別のある数学者は、『直線外の点を通る平行線は何本でも引ける』というのを公理にして、やは

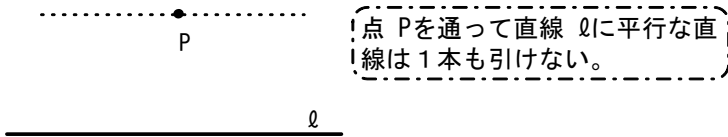
『平行線の公理』は次のようにも表せる。

ユークリッド幾何学における＜平行線の公理＞

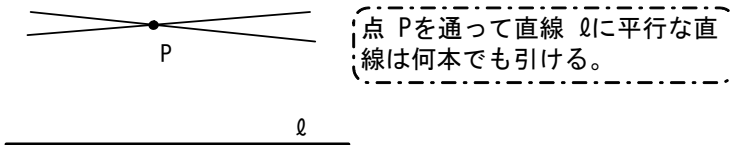


非ユークリッド幾何学における＜平行線の公理＞

その 1



その 2



り幾何学の体系を作り上げたわ」

私には訳の分からない話が交わされている。『幾何学は平面上だけで十分じゃないか』と言いたくなる。

「こういう例を見ると、数学の『公理』の意味が分かるでしょ？」

マチ子先生がダイキの顔をのぞき込みながら言うと、ダイキは深くうなずいた。続けてマチ子先生は私のほうを見たが、私はちょっとあいまいな顔でうなずくしかなかった。

「そういえば、お姉さんのお名前を聞いてなかったわね。それから苗字も」

「エンドウと言います。エンドウは普通の遠い藤ではなくて、十円、百円の円に、お堂の堂です。私の名前はマキ、真実の真に喜ぶです」

マチ子先生が「あら？」という顔をした。

「そうなんです。左右対称です。ダイキは大きいに貴重の貴です」

「お父さんは？」

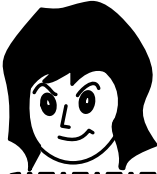
「富士山の富士に夫です。コロも最初はホロだったんですが、私がおかしいと言ってコロになったんです。でも、相当父に教え込まれたらしくて、試しに『ホロ』って呼ぶと尻尾を振るんです」

マチ子先生が愉快そうに笑い、「まさかと思うけど、お母さんは？」と聞いた。話に加わらず本棚を眺めていたはずの大貴が「美里、美しいに里」と言った。マチ子先生が「エー！」と驚きの声を発し、笑った。

「母は全く偶然です。父が変なことにこだわっただけです」

「面白い一家ね。全員の名前をたてに並べて書いたら美しいんじゃない？」

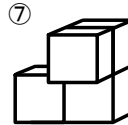
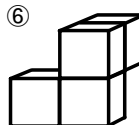
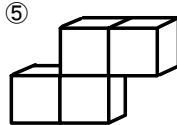
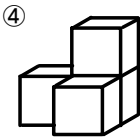
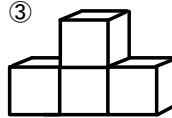
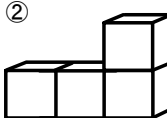
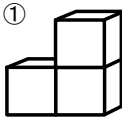
マチ子先生はそう言って愉快そうに笑い、そのあと自分の家族の



3×3×3の立方体を作る



1辺の長さが1(2~3cmが適当)の立方体の木片(ホームセンターなどで売っている)を27個用意し、下の図のように木工ボンドで貼り合わせて、7個の立体を作ります。



【7個の立体の意味】

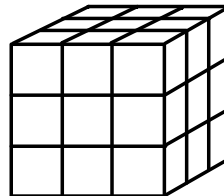
7個の立体は次のルールにしたがって作られたものです。

4個以下の小さな立方体を面と面が重なるように貼り合わせたもので、「自分自身の内部のいかなる2点を結ぶ線分も、自身の内部に収まってしまうもの」ではないようなもの。分かりやすく言うと、直方体(一列に貼り合わせたものや四角の形に貼り合わせたもの)は不可、という意味です。

1個、2個では出来ません。3個で①のようにできます。3個並べた場合は、②、③の2つ出来ます。2個並べた場合に、残りの2個を貼り付ける仕方は、④~⑦の4通りあります。

上の7個の立体を組み合わせて、図のような3×3×3の立方体を作るというのが問題です。

(答えは何通りもある)



ヒント:

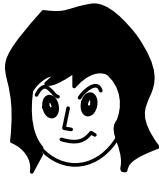
まず、⑥と⑦をコンパクトな形になるように組み合わせると作りやすい。

話をした。だんなさんは仕事の関係で、イギリスに行っている。そして30歳過ぎの息子さんがいて、今は京都の大学で先生をしている。この息子さんの小さい頃と大貴がよく似ているのだそうだ。やはり算数が得意で、人との関りがうまくできない。初めて大貴を見かけたときに、同じタイプの子だとピンときたそうだ。

「大貴君、お姉さんやコロちゃんをあまり待たせちゃいけないから、今日はこれくらいにしましょう。大貴君は本に興味がありそうだから、今度息子の部屋を案内してあげる。大貴君の好きそうな本がたくさんあるわよ」

本棚の前に座り込んでいる大貴にマチ子先生が声を掛けた。大貴は少しも耳に入らないようで顔も上げない。私が「大貴！」と言っても動かない。マチ子先生が「大貴君、算数の問題を出すわよ」と言った。すると大貴は一瞬顔を上げた。マチ子先生は間髪を入れずに話し出した。

「いい、大貴君。問題を言うから頭に入れて。1から9までの9個の数を3掛ける3の9個のマスに1個ずつ入れて、どのたても横も斜めも足して15になるようにするの。回転させたりひっくり返したりして重なるようなものは区別しないわ。そうすると答えは1つだけ。大貴君も真喜さんも答えはすぐに見つかると思うわ。問題はね、何故真ん中は5なのか。あっ、言っちゃった」マチ子先生は一瞬口を抑えて笑ったが、すぐに続けた。「真ん中が5だろうというのは、多分2人ともすぐに予想できるでしょう。だけどね、真ん中は5だということを説明するとなると簡単ではないの。真ん中以外のマスも、どうしてかを考えながら入れるとなるとやっぱり簡単じゃない。考えてみて。これは3掛ける3の魔方陣の問題よ」



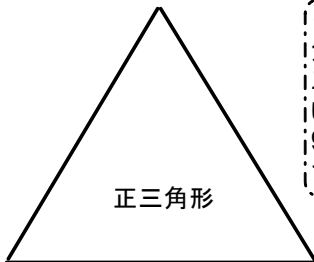
どうして直角は 90° なのか



90° 直角 ($=\angle R$) $=90^\circ$

2 直角 ($=2\angle R$) $=180^\circ$

どうして直角を 100° ではなく 90° とするのでしょう



もしも直角が 100° だとすると、三角形の内角の和が 200° となり、正三角形の1つの内角が $(200/3)^\circ$ という半端な値になってしまいます。
 $90=9\times 10$ であり、3の倍数にもなっていて都合がよいです。

昔、1年を360日と考えていたからというようにも言われています。

$$100=10\times 10=2\times 2\times 5\times 5$$

\Rightarrow 100の10以下の約数は、1, 2, 4, 5, 10

$$90=9\times 10=2\times 3\times 3\times 5$$

\Rightarrow 90の10以下の約数は、1, 2, 3, 5, 6, 9, 10

(4と8も約数ではありませんが割り切れます)

2) 3×3の魔方陣を解く * * * * *

マチ子先生の言った通り、9個の数をたて横斜めすべての和が15になるように入れるのは、私にも簡単にできた。マチ子先生に言われなかったとしても、真ん中は9個の数の一番中心的な5が入るであろうことは予想できただろう。あとは残りの数をあれこれ入れ替えているうちに、そう時間もかからずにできた。大貴は例によって腕を組んだり頭をかいたりしながら、部屋の中を歩き回っている。最初のうちはホロも後を追ったが、途中でやめてしまった。

『真ん中が5でなきゃいけないという理由は何だろう？』どう考えたらよいのか、私にはさっぱりわからない。

大貴の口から何かかもれ始めた。解決の糸口が見えてきたのかもしれない。ぶつぶつ言うのが、次第に言葉になってきた。

「真ん中が5でなかったら・・・、6だとしたら・・・、そうか、真ん中が6だとしたら、どこかに9をいれたときに、その反対側に入る数がない。真ん中が4だとしたら、周りのどこかに1を入れたときに、その反対側に入る数が無い。真ん中は5しか入れられない・・・。ねえさん、できたよ！」

『大貴は、真ん中が5であると言いたいのに、どうして5でないとしたら、なんて考えたんだろう。どうしてそんな発想ができたんだろう』改めて頭のできの違いを感じた。

* * * * *

「こういう考え方をするのは習っていないはずなのに、よく思いついたわね、大貴君」

大貴の説明を聞いて、マチ子先生が驚きの声をあげた。心底感心したようだ。大貴がニコニコし、私も誇らしく感じた。

3×3の魔方陣の解

下の(1)、(2)、(3)は 3X3の魔方陣の解である。
いずれも、全てのたて(3つ)、横(3つ)、斜め(2つ)の和が15になっている。

(1)

4	3	8
9	5	1
2	7	6



(1)と(2)は、互いに 90° 回転した関係になっている。

(2)

2	9	4
7	5	3
6	1	8



(2)と(3)は左右対称になっている。

(3)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

魔方陣では、縦、横、斜めの数の合計だけを問題にするので、回転して一致するものや、上下や、左右で対称のものは区別されない。したがって、(1)、(2)、(3)は同じ解とみなす。この先証明されるが、3X3の魔方陣の解は1つしかないことが分かる。

「本当にすごいわ。言われれば簡単にわかることだけど、自分で思いつくということはなかなかできないものよ」

大貴の目が輝いている。

「大貴君、その先は考えてみた？真ん中の5以外の数の入れ方。それもちゃんと説明できるかな？」

大貴が少し下を向いて頭をかいた。

「さすがにそこまではね。これがまた簡単に思いつくことではないの。一緒にやってみましょう」

マチ子先生はそう言って紙と鉛筆を使って話し始めた。たし算しか使わないだろうから私にもわかるはずだ。2人のやりとりを聞くことにした。

マチ子先生は、3かける3の表を作って真ん中のマスに5を入れた。そして、真ん中を通るたてと横と2本の斜めの線（対角線）をうすく書き込んだ。

「5以外の残りの8つの数は、たして10になるような4つのペアになるわね。9と1、8と2、7と3、6と4。これらのペアが今引いた4本の線の5以外のマスにおさまるわね」

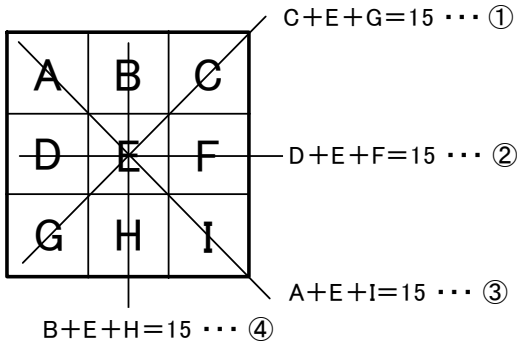
確かにそうだ、どの線の3つの数もたして15のはずだから。『そうか、1つずつ入れていくんじゃなくてペアにして入れていくのか』。

「ここからが問題よ」

マチコ先生はそう言って大貴の顔をのぞき込んだ。大貴の顔にまだ何かひらめいた様子は見られない。大貴はマチ子先生が書いた4つの数のペアと私たちが解いた（9個の数が全部おさまった）表を見比べる。やがてその2枚の紙を手に立ち上がって、テーブルの

3X3魔方陣を方程式で解く

9個のマスに入る数を、図のようにA、B、C、D、E、F、G、H、I、とする。



中心のEが5であることを示す。①+②+③+④より

$$(A+E+I)+(C+E+G)+(D+E+F)+(B+E+H)=15+15+15+15$$

$$(A+B+C+D+E+F+G+H+I)+E+E+E=60 \dots ⑤$$

ここで、

$$A+B+C+D+E+F+G+H+I=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

よって、⑤より、

$$45+3E=60$$

$$3E=15$$

$$\therefore E=5$$

中心のEは5であることが分かった。

A	B	C
D	5	F
G	H	I

周りを歩き始めた。マチ子先生は私の方を向いてかすかに笑い顔を見せ、小さな声でささやいた。

「息子は走り出すの、考え込むと。部屋の隅から隅まで、何回も何回も。『カケ僧』ね」

2人で口をおさえて笑う。

やがて大貴がマチ子先生のわきにちょこんと座った。

「9と1は対角線には入らない」

「その通りよ。でもそれはどうして？」

大貴が眉に力を入れ、「うーん」とうなる。悔しそうだ。そして、また立ち上がって歩き出した。

「わかった！」

大貴はソファーにではなく、勢い余ってマチ子先生の膝に座ってしまった。マチ子先生は驚いた顔をしたが、そのまま耳を傾けた。

「9と1を対角線に入れると、もう1つの対角線に入れられるペアがないんだ」

「正解！大正解！」

マチ子先生も興奮して、大貴の肩を抱き寄せた。大貴がやっと気がついてマチ子先生の膝からおりた。そして、たての列に9と1を書き入れた。

「真ん中に5を入れられないのを示すのと同じ考え方で、9と1が斜めには入れられないことを示したのね。すごいわ、大貴君。まだこの先も簡単ではないけど、大貴君なら時間の問題ね」

大貴はまた立ち上がって歩き始めた。もう何も手にしていなかった。

「9の両側はたして6だから、4のペアと2のペアが入る」

A	B	C
D	5	F
G	H	I

A	9	C
D	5	F
G	1	I

2	9	4
D	5	F
6	1	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

E=5 だから、 $A+I=10$ 、 $B+H=10$ 、 $C+G=10$ 、 $D+F=10$ であり、
 これら4組の数の組み合わせは、
 1と9、2と8、3と7、4と6 …… ②

また、
 $(A+B+C)+(A+D+G)=15+15$
 $2A+(B+D)+(C+G)=30$
 $2A+(B+D)+10=30$
 $B+D=20-2A$
 $B+D$ が一番小さくなるのは、 B 、 D が1と2のとき。

よって、
 $B+D \geq 3$
 $20-2A \geq 3$
 $17 \geq 2A$

A は整数だから、 $A \leq 8$
 同様に、 $B+D$ が一番大きくなるのは、 B 、 D が8と9のときで、
 $B+D \leq 17$
 $20-2A \leq 17$
 $2A \geq 3$

A は整数だから、 $A \geq 2$
 このことから、 A (すなわち角)には、1と9は入らない。
 (つまり、 A と I のペア(斜めのペア)は、1と9ではない)
 1と9はたてか横に入る。

$B=9$ 、 $H=1$ とする。

$A+C=6$
 上の②において、和が6になるのは、2と8 の2と、4と6の 4の場合のみであるから、
 A と C は2と4。

$A=2$ 、 $C=4$ とすると、
 $I=8$ 、 $G=6$ 。

残る D 、 F は、3と7だから、
 $D=7$ 、 $F=3$ 。

「そう、それでおしまい」

マチ子先生が大きくうなずいている。横に入れる最後の1組は私にもわかった。それにしても大貴はすごい。こうしてチャンスを与えられれば、どんどん力を発揮しそうだ。

「大貴君、素晴らしい。今の解き方は高校生だってなかなかできない。でもね、高校生ならこうやって解くわ。難しい数学は使わないから説明するわね」

マチ子先生はそう言って、紙と鉛筆を使って説明を始めた。最初に、表の9個のマスにA、B、C、・・・、H、Iと書き入れた。そして、さっきと同じように、真ん中のEのマスを通る、たて、横、斜めの4本の線を書き込んだ。

後は図に示したのを見たほうがわかりやすい。

なるほど、式と計算でやると、真ん中のEが5であることが直ちに出てくる。とても格好良くてスマートに感じる。

次にAを考えるが、直ちにAがわかるんじゃなくて、さっきの大貴と同じように、Aには9と1は入らないという結論がでるのが面白いと思った。Aに入る数はなんと直ちには確定しないのだ。

9と1をたてに入れるところから先は、さっき大貴がやったのと同じやり方だった。すべて数式だけで、Aが何、Bが何、・・・、Iが何と解けるのかと思っていたが、そうではなかった。そのあたりのことをマチ子先生に聞くと、こういう説明だった。

真ん中のEは1つしかない場所だから数が確定するけど、4つの角や上下左右は1つだけの場所と言えないから確定しない。そういう意味では、この問題は方針が立てにくく、難しい問題と言える。

それから、大貴が用いた『本当はこうだと言いたいけど、なかな

3X3魔方陣を数式を用いない(言い回し)で解く

(1)

9	B	C
D	6	F
G	H	I

(2)

A	1	C
D	4	F
G	H	I

(3)

9	B	C
D	5	F
G	H	I

まず、E=5であることを示す。

仮に、E=5ではなく、E=6としてみる。

残る(Eを除く)AからIのどれかに9が入るが、たとえば、A=9とすると<(1)>、 $A+E=15$ となり、Eの反対側にあるIに入れる数がなくなる。他の文字に9が入った場合も同様だから、E=6とすると、9が入る文字がなくなる。 $E \geq 7$ にしても、同じようになる。

よって、 $E \geq 6$ では成立しない。… ①

今度はE=4としてみる。

他の文字のいずれかに1が入るが、たとえば、B=1とすると<(2)>、 $B+E=5$ となり、Hに入る数がない。

$E \leq 3$ にしても、同じようになる。

よって、 $E \leq 4$ では成立しない。… ②

①、②より、E=5

E=5であるから、

Eをまたぐ4組、AとI、CとG、BとH、DとFは、それぞれ、

9と1、8と2、7と3、6と4 … ③

のいずれかである。

次に、角(A、C、G、I)には9と1のペアは入らないことを示す。

仮に、A=9とする<(3)>。

CとGのペアは③のいずれか(もちろん9と1以外)であるが、いずれのペアにおいても、 $A+C$ あるいは $A+G$ が15以上になる。

従って、Aに9は入りえない(9と1のペアは斜めには入らない)。

9と1のペアはBとHまたはDとFである。

か上手く言えないようなときに、そうではないとするとおかしなことが起きるから、やっぱりこうだ』という解き方。そういうやり方が数学では重要な証明法としてよく使われるそうで、背理法と言うのだそうだ。「たとえば」と言ってマチ子先生はこんな話をしてくれた。

『ある事件があって、容疑者が A、B、C、3 人いたとする。犯人をなかなか特定できないとき、刑事はどうするか。消去法というやり方、つまり真犯人ではなさそうな人物を容疑者から消していく。そのために刑事は容疑者たちのアリバイを調べる。たとえば、容疑者 A は犯人じゃないと言いたいが、あえて犯人だとしてみる。それでもアリバイが成立すれば、同一人物が同時刻に異なる場所にいたという、ありえない矛盾が生じる。だから A は犯人じゃない』

それから、こんな話も。

『ある点から直線に垂線を引く。何本引けるか？誰が考えても 1 本しか引けない。ところが、どうして 1 本しか引けないのかって聞かれたらどうするか。当たり前すぎて説明しにくい。上手く納得させられる説明の仕方はないか。そこで、背理法を用いる。結論を否定して、点から直線に垂線が 2 本引けたとする。すると点を頂点とする三角形ができるけど、下の 2 つの角度は 90° ずつだから、頂点の角度を合わせると合計が 180° を越えてしまう。これでは、三角形の内角の和は 180° ということに矛盾する。だから、2 本は引けない』

背理法というのは面白そうだ。マチ子先生の話では、高校の数学でもあまり見られないけど、もっと専門の分野では頻繁に使われるそうだ。

(4)

A	9	C
D	5	F
G	1	I

9と1がBとHに入ったとする<(4)>。

A+C=6、G+I=14 であるが、③においてこれを満たすのは、AとCが2と4で、GとIが8と6のときである。

(5)

2	9	4
D	5	F
6	1	8

A=2 (I=8)、C=4 (G=6) とする<(5)>と、残るDとFは7と3である。

「真喜さん、今度はこんなのをやってみる？ちょっとパズルっぽい問題だけど。大貴君にはあとで話してあげて。多分、2人とも簡単に解けると思うわ」

大貴はマチ子先生の背理法の話が終わると、待ちかねたように息子さんの部屋に行かせてもらい、ある本に夢中になっている。

マチ子先生は、紙に10本の棒を描いて、それぞれの頭に小さな丸をつけた。

「今はあまり見かけなくなっただけど、マッチ棒。私が初めてこの問題を見たときはマッチ棒だったの。紙切れでもおはじきでも何でもかまわないわ。問題はね、このうちの5本を移動させて、5組のペアを作るの。マッチ棒で言えばばってんね。ただし、移動させるときは、必ず2本のマッチ棒をまたぐようにすること。すでにばってんになっている場合も2本と数えるの」

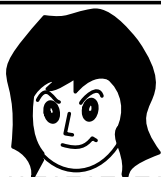
私は「また家でゆっくり考えてみます」と言っておいとますことにした。

大貴は私が何度も声を掛けたがピクリともしない。マチ子先生は大貴の近くに行って肩に手をのせて言った。

「大貴君、何の本？気に入ったんなら貸してあげるわよ。持って帰っていいわよ」

大貴が顔を上げた。『持って帰っていい』そういう自分にとって都合のよいことだけは耳に届いているようだ。本を見たまま立ち上がって玄関の方へ向かった。

「さっきも言ったけど、パズルを解くことは、それほど難しくないと思うわ。あれやこれややっているうちに解けるでしょう。解けたらちょっと考えてみて。この問題を作った人はどうして10本にし



集合(その1)



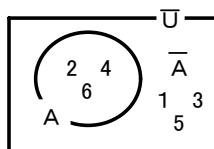
ある条件(誰にとっても明らかな)を満たすものの集まりを**集合**という。
 <集合ではない例>…「背の高い人の集まり」、「美しい花の集まり」
 <集合の例>…「満90歳以上の人の集まり」、「1から100までの整数」

集合の表し方。たとえば、1から10までの整数の集合(Aとする)は、
 $A = \{ n \mid 1 \leq n \leq 10, n: \text{整数} \}$ あるいは、 $A = \{ 1, 2, 3, \dots, 10 \}$
 注: 集合Aに入っている1つひとつを、集合Aの**要素**(または**元**)という。

集合は右のような図(ベン図という)で表すと考えやすい。
 サイコロの目の集合を $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ とし、
 偶数の目の集合を $A = \{ 2, 4, 6 \}$ とする。
 集合Uの要素で集合Aに入らないものの集合をAの**補集合**といって、 \bar{A} で表す。

$$\bar{A} = \{ 1, 3, 5 \}$$

注: この場合、集合Uを**全体集合**という。



2つの集合A、Bにおいて、Aの要素が全てBに含まれるとき(AがBの一部分であるとき)、AはBの**部分集合**といって
 $A \subset B$ (注: AがBと一致する場合も含む)

と表す。たとえば、

$$A = \{ 1 \text{ から } 20 \text{ までの整数で } 2 \text{ の倍数} \}$$

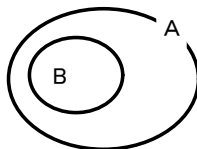
$$= \{ 2, 4, 6, 8, \dots, 20 \}$$

$$B = \{ 1 \text{ から } 20 \text{ までの整数で } 4 \text{ の倍数} \}$$

$$= \{ 4, 8, 12, 16, 20 \}$$

のとき、 $B \subset A$ (BはAの部分集合)。

注: $A \subset B$ 、 $B \subset A$ が成り立つとき、2つの集合A、Bは**等しい**といって、
 $A = B$ と表す。



四角形において、

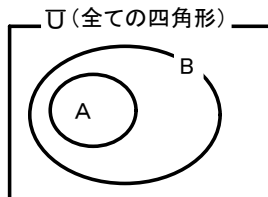
$$A = \{ \text{向かい合った2組の辺が平行} \}$$

$$= \{ \text{平行四辺形} \}$$

$$B = \{ \text{向かい合った1組の辺が平行} \}$$

$$= \{ \text{台形} \}$$

のとき、 $A \subset B$ である。



たのか。もっと少ない本数や多い本数だったらどうなるか。ちょっと面白いわよ」

マチ子先生は、靴をはきながらもまだ本から目を離そうとしない大貴の肩に手を掛け、少し強い調子で言った。

「大貴君、挨拶くらい、きちんとしましょう」

大貴は少し驚いたように振り返った。

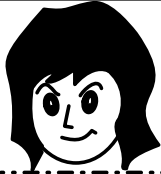
「歩きながらはダメよ！守れないのなら貸してあげられません」

大貴は「わかりました。さようなら」と言って、ペコリと頭を下げた。

「問題、おねえさんに出したから、家に帰って聞いたら考えてみてね」

大貴はそこで初めて問題のことに気が付いたようだった。

帰り道、大貴はマチ子先生との約束通り、本は開かずに大事そうに胸の前に抱えて歩いた。しきりと問題を聞きたがったが、私は『マチ子先生に、家に帰ったら』って言われたからというのを口実に教えなかった。人の話を聞かないと損をするというのを経験させてやれ、という少しだけ意地悪な気持ちもあったから。



集合(その2)



サイコロの目の集合を $\cup = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

偶数の目の集合を $A = \{ 2, 4, 6 \}$

4以上の目の集合を $B = \{ 4, 5, 6 \}$ とする。

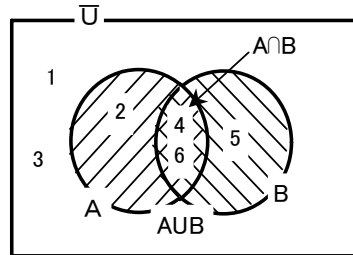
Aの条件「偶数」、Bの条件「4以上」において、「偶数」または「4以上」という条件を満たす集合をAとBの**和集合**といって、 $A \cup B$ と表す。

$A \cup B = \{ 2, 4, 5, 6 \}$

「偶数」かつ「4以上」という条件を満たす集合をAとBの**共通部分**といって、 $A \cap B$ と表す。

$A \cap B = \{ 4, 6 \}$

注: 日常使われる「または」は『昼食はパンまたはそばを食べる』のようにどちらか一方を言う場合が多いが、数学では上の例の4、6のように、両方を満たす場合も多くある。



40人のクラスで、夏休みに海へ行ったという生徒は32人、山へ行ったという生徒は25人、両方へ行ったという生徒は20人だった。

全体集合を \cup 、海へ行った生徒の集合をA、山へ行った生徒の集合をBとする。また、集合Aの要素の数を $n(A)$ のように表すことにすると、

$n(\cup) = 40, n(A) = 32, n(B) = 25,$

$n(A \cap B) = 20$

このとき、海または山へ行った生徒の集合は $A \cup B$ であるが、その数 $n(A \cup B)$ は右のベン図より、

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

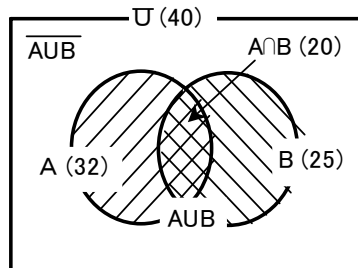
(注: $n(A) + n(B)$ で、 $n(A \cap B)$ を2度たしたから、1つ分を引くと考え)

よって、

$n(A \cup B) = 32 + 25 - 20 = 37$ (人)

また、どちらへも行かなかった生徒 $n(\bar{A} \cap \bar{B})$ は3人とわかる。

(注: ベン図から、 $A \cup B = \bar{A} \cap \bar{B}$ である)



3) 10本の棒で5個のぼってんを作る * * * * *

家に帰って、大貴に問題を話したが、この問題は私の方が早く解けた。まったくの偶然だ。何も難しいことを考えた訳ではなく、ただ適当に動かしているうちにできた。当然のことながら大貴は猛烈に悔しがった。涙をにじませ、両こぶしをぎゅっと握りしめ、自分のふがいなさが許せないのだろう、肩で息をしている。

こんな時はなぐさめるような声掛けは逆効果だから、しばらくそっとしておくことにした。『こういう経験もしたほうがいい』

やっと少し落ち着くと、まだ興奮状態の残る顔で言った。

「ねえさん、本当にできたの？」

私がやって見せようとする、「いい、自分でやる！」とあって、また10本のマッチ棒を机の上に並べた。しばらくすると、案の定、立ち上がって部屋の中をぐるぐる回り始めた。

私は5組のぼってんになったマッチ棒を元に戻し、さっきのままできたやり方を思い出しながらもう一度やってみようとした。ところが思い出せないしできない。焦る気持ちがふくらみ頭が混乱する。今大貴にやって見せてと言われたら到底できない。『まずいなあ、これでは解けたとはいえない』

「ねえさん、できたよ！」

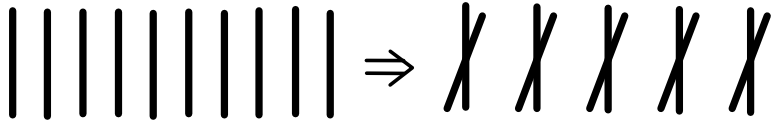
大貴は頭の中で解いてしまった。椅子に座り実際に並べて、「うん、できた、できた」と言い、左手にあごをのせて、「そうか、なるほど」とうなずいている。移動の仕方がしっかりつかめたようだ。大貴の勝ちだ。

「大貴、マチ子先生が最後におっしゃっていたこと聞いてた？」

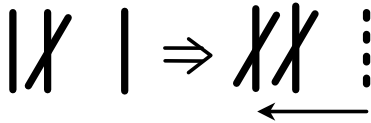
大貴は解けたことで気分をよくしたのか、珍しく私の言うことに

10本のマッチ棒でばってんを5個作る問題

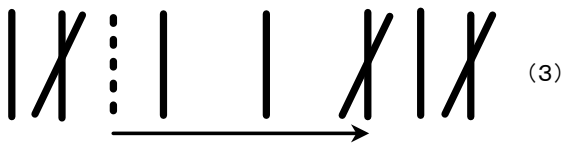
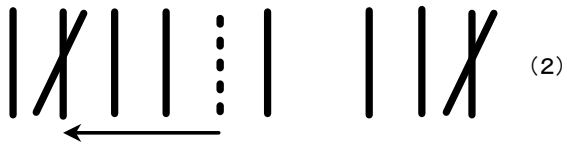
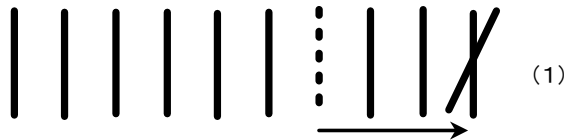
横に並んだ10本のマッチ棒の5本を移動させて、5個のばってんを作る。



移動のルール：
必ず2本のマッチ棒
を飛び越える。



答えの一例



(続く)

耳を傾けた。私はいいチャンスとばかりに、少し勢い込んで話した。

「マチ子先生がおっしゃるにはね、この問題は解くことは大したことないけど、何か面白いことが隠れているそうよ」

大貴が「えっ？」という顔になる。

「人の話を聞かないと損をすることがあるの！」

「わかったよ、マチ子先生が何て言ったか教えてよ」

「いいわ、教えてあげる。その代わり、これからは人の話をよく聞くことね」

「わかったってば。だから教えてよ」

『他人の話が耳に入らない、意識を向けるのがなかなかできないというのは、大貴の場合治るわけではない。でも、こういう経験を繰り返して、少しでも習慣として身に付けていけばいい』

「この問題を作った人はなぜ10本にしたかって。それより多かったり少なかつたりしたらどうなるかって。わかると面白いそうよ」

大貴の顔がパッと変わるのがわかった。

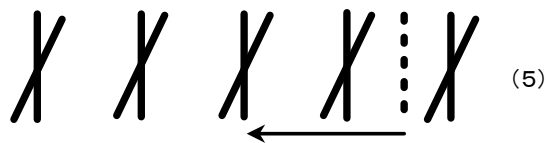
「なぜ10本なのか？10本じゃないとどうなるか・・・」

そう言って立ち上がると、また下を向いて歩き始めた。そうしてしばらくぶつぶつ独り言が続いた。ぶつぶつが気になったのか、ホロがあとをつけずに見上げている。

「4本ではだめ。6本では・・・」

私もそれに合わせてマッチ棒を並べてみる。『4本では端同士でばってんにしたらそれでもう終わりだ。6本では・・・、途端に動かし方が多くなって話が複雑になる。左右対称だから、一番右端、右から二番目、三番目の三通りやればいい』

実際に動かしてみると、どの場合もダメになることはすぐにわか



5個のぱってんが等間隔で美しい。また、(1)~(5)の移動のさせ方が自然な流れになっている。

った。8本用意して始めようとしたとき、大貴が叫んだ。

「そうか、8本でできるんだ！」

大貴は頭の中で解いてしまった。

「えっ、もうできたの？」

「うん、8本だと簡単にできるんだ」

「じゃあ、どうして10本にしたの？」

「それもわかったよ。この問題を作った人は、わざと10本にしたんだ」

「えっ、わざと10本に？」私が驚いて「どうしてわざとってわかるの？」と聞くと、大貴は得意そうな顔をして答えた。

「8本だと簡単にできてしまうんだよ。10本にしても解けるから、マッチの本数を多くして問題を解きにくくしたんだ」

私はわかるようなわからないような、頭の中が整理できなくて首を傾げた。すると大貴が勢い込んで話し始めた。

「ねえさん、マッチ棒を10本並べてみて」

私が10本並べると、「右から4番目を一番右へ動かすんだ」と言った。私は言われたとおりに動かした。右端にばってんができ、左側に……。『そうか、左側に8本が残る！なんて頭の良い奴だ』

「マチ子先生が言った意味がわかったよ。12本でも14本でも20本でも、8本以上なら何本でもできる」

「どうして12本、14本でもできるの？」

「今10本でやったじゃないか。右端にばってんを作っていけば、2本ずつ減るからいずれは8本になる」

「そういうことか」『私にも10本にしたわけが見えてきた』

「そうだよ、多くすると確かに複雑になって解くのが大変になるけ

マッチ棒が10本より少ない場合

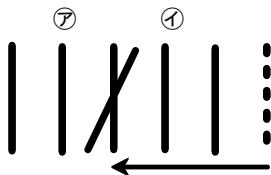
【1】4本のとき



これ以上動かせない。
4本のときは不可。

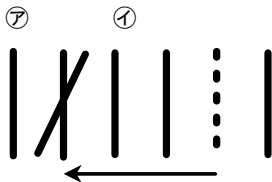
【2】6本のとき

① 一手目に1番端を動かした場合



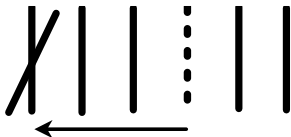
次に動かせるのは⑦か⑧
だが、どちらもそのあとが
続かない。

② 一手目に端から2番目を動かした場合



次に動かせるのは⑦か⑧
だが、どちらもそのあとが
続かない。

③ 一手目に端から3番目を動かした場合



残りが4本になるので不可。

①、②、③より、6本のときは不可。

ど、あまり多いと解く気がしなくなるし、10本というのは問題として格好いいからね」

「この問題でさ、大貴みたいに、8本なら解けて、だから10本以上何本でも解けるってことに気が付く人ってそういないと思うわ。大貴、すごい。でも、マチ子先生がヒントを言ってくれたおかげね」

大貴は上の空でニヤニヤして、もう人の話を聞いていない。

* * * * *

マチ子先生は「大貴君、素晴らしい。完べきよ」と言って、大貴の肩に手を置いて軽く揺すった。大貴は満足そうにニコニコしている。

「10本にした意味まで突き止めたなんて、本当に素晴らしい」

マチ子先生はそう言いながらマッチ箱をもってきた。

「じゃあねえ、大貴君。今からこの問題を少し見方を変えて考えてみましょう。私あるとき気が付いたんだけど、なかなか面白いわよ」

大貴が神経を集中させてマチ子先生の顔を覗き込んでいる。気が向くところいうことができるのだ。

マチ子先生は4本のマッチ棒で2組のぼってんを作った。そして、大貴と私の顔を見ながら言った。

「この状態から、2本を跳び越すというルールで、4本のバラバラ状態にできる？できないわよね」

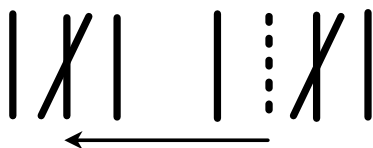
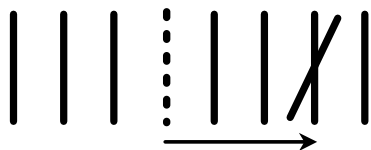
次に、6本で3組のぼってんを作った。

「これではどうかな？」

私は頭の中で、右端のぼってんの棒の1本を残る2つのぼってんの間に移動させる。ぼってん、棒、ぼってん、棒、になるがその後が続かない。元に戻し、中央のぼってんの1本を右端に移すと、さ

【3】8本のとき

!ばってんを端に作るのは、6本残しになるので不可。
!下のように、端から2番目に作ればよい。



!このあとはただちにできる。!

!8本のとき、できることがわかった。!

つきと同じ状態になる。2人ほぼ同時に「できない」と言った。ここで、大貴が「そうか！」と甲高い声をあげた。

「ばってんから崩す方が簡単なんだ！」

「そうなの。ずいぶん早くに気が付いたわね。この問題はでき上がった状態から出発点に戻るといって簡単なの」

「そうなのかあ」

私は思わず声をあげた。

「8本でやってみましょう」

マチ子先生はそう言って、4組のばってんを作った。

「真喜さん、やってみる？」

私は「はい」と言って、まず右端のばってんの1本を隣のばってんの左側に移した。その次に移せるのは左端のばってんかその隣のばってんだ。試しに左から2番目のばってんの1本を左端へ移した。棒、ばってん、棒、棒、ばってん、棒、の状態になった。残された2つのばってんは、どちらもその隣に2本の棒があるから、簡単に移せて、8本の棒になる。

「信じられない。全然問題にならないですね」

私が感動して言うと、大貴が言った。

「4組のばってんでできないのは、内側のばってんの棒を内側に移すときだけだ」

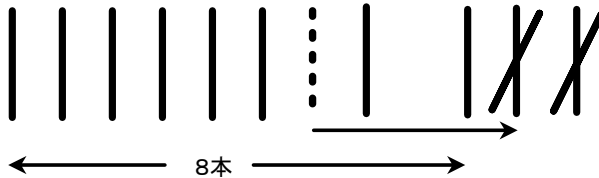
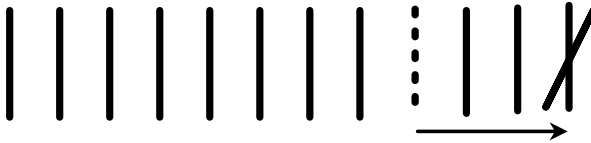
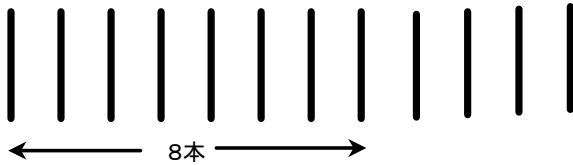
『どういうこと？』私が戸惑っていると、マチ子先生が

「そうね。ばってん、棒、ばってん、棒、ばってん、の状態にした時だけあとが続かないわね。かえて、できない状態にする方が難しいくらいね。8本から4組のばってんを作るより、逆に4組のばってんを8本の棒にする方がずっと楽なの。だったら、楽なやり方

マッチ棒が8本より多い場合

8本のときできることはわかった。

このことから、
マッチ棒が、10本、12本、・・・ のときは、ばってんを右端から順次作って、残る棒が8本になるようにすればよい。



を逆にたどれば正解できるわけね」

私たちは同時に「おーっ」と声をあげた。

「数学ではよくあることよ。ゴール地点が見えているときに、その地点から逆にスタート地点を目指すことで、元の問題を解決する糸口が見えることが。頭に入れておくといいわ」

大貴が感心したようにうなずいている。

「例えば、極端な例はね。単純に作られた迷路の問題がそう。ゴール地点からスタート地点を目指す問題でなくなってしまうわ」

「そうか！」

私たちは同時にそう言ったが、そのことは私にも簡単に理解できた。

マチ子先生がちらっと時計の方を見ながら言った。

「じゃあ、次の問題にしましょうか」

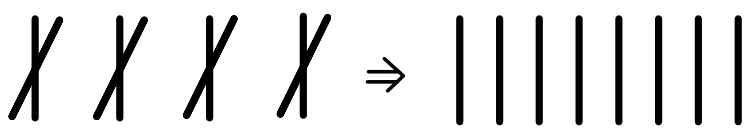
大貴は息子さんの部屋の本棚が気になったようだが、『問題』と聞いて、マチ子先生の話に耳を傾けた。

「図を描いてあげてもいいけど、あなたたちなら頭にイメージできるだろうから、話をよく聞いてね。

3本の棒が立っていて、そのうちの1本に大・中・小3枚の円板がささっています。下から順に大、中、小よ。その3枚の円板をそのままの状態別の棒に移動させるの。移動させるときのルールは2つ。一度に1枚の円板しか動かせません。小さな円板の上に大きな円板をのせてはいけません。これは『ハノイの塔』という名で知られる有名な問題よ。

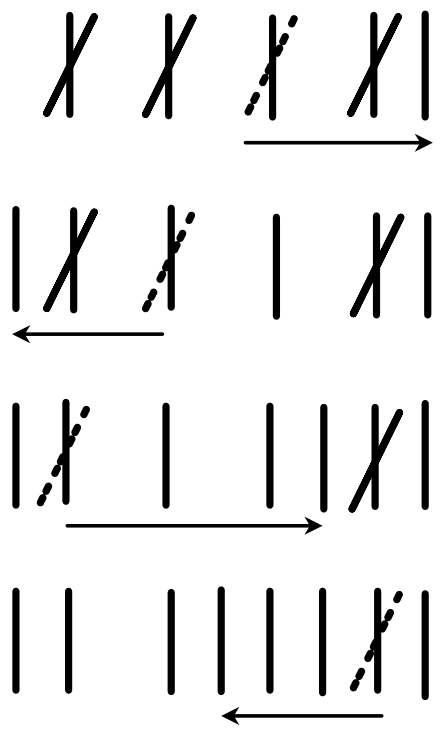
この問題も2人には簡単に解けてしまうわ。考えて欲しいのはね、4枚になったらどうなるか、5枚になったらどうなるか。10枚に

逆に、4組のばってんを8本の棒にもどす



X | X | X のような状態になると、その先動かせなくなる。
それさえさければ、どのように動かしても必ずできる。

動かし方の一例

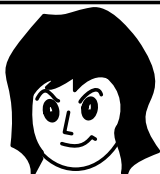


なったら……。そう、10枚なんてなったら到底やってられない。それで、考えて欲しいの。10枚になっても20枚になってもこうすれば移動させられるという説明の仕方を。それからそれぞれの枚数での手数についても。ちょっと難しいけど考えがいがあるわよ、きっと」

今回は、大貴はきちんと最後まで話を聞き、しっかりと頭に入れたようだ。

「大貴君、あの本はまだ読み終えてないわよね？また別の本が読みたくなったら言ってね」

大貴は「はい」と言って、借りている本を胸の前に抱えた。玄関ではマチ子先生に顔を合わせ、「さようなら」と言ってペコリと頭を下げた。マチ子先生に言われたことを覚えていて、ちゃんと挨拶できた。私は嬉しかった。そしてマチ子先生に心の中で感謝した。



数を指数を用いて表す



ある数を何回かくり返してかけるとき、次のような書き方をすると、すっきり表すことができます。

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

右肩に小さく書く数(かける回数を表す)を**指数**と言います。たとえば、

$$5^2 = 25、10^3 = 1000、2^{10} = 1024$$

です。 2^{10} は覚えておくとよいでしょう。

指数で表された数どうしの計算は次のようになります。

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

$$(3 \times 4)^5 = 3^5 \times 4^5$$

$$(4^5)^3 = 4^{5 \times 3} = 4^{15}$$

一般に次のような式が成り立ちます。(指数法則)

a 、 b は正の数、 m 、 n は正の整数(自然数)として、

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(ab)^m = a^m \times b^m$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

2^{64} が何桁の数になるか、指数の計算で求めてみましょう。まず、

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$$

したがって、

$$(2^{10})^6 > (10^3)^6$$

$$2^{60} > 10^{18}$$

この両辺に、 $2^4 = 16$ をかけて、

$$2^{64} > 16 \times 10^{18} = 1.6 \times 10^{19}$$

10^2 は100で3桁ですから、 10^{19} は20桁の数であることがわかります。つまり、 2^{64} は20桁以上の数であると言えます。

高校で習う『対数』をつかうと、 $0.3 \times 64 = 19.2$ から、やはり20桁の数であると言えます。(高校で習うときに思い出してください)

4) 将棋倒しからハノイの塔を考える * * * * * * * * * * *

私たちは家に帰る道を歩きながら、頭の中で3枚の円板を移動させることができた。2人で同じ図をイメージし——3枚の円板がささった棒を頂点に三角形になるように残り2本の棒を立てる——、小を右、中を左、・・・と確認し合った。7手で移動を完成させられることもわかった。

家に帰ると私たちは紙で大きさの異なる4枚の円板を作り、棒は無くてもいいということで、大きい順に重ねていろいろ移動させた。移動させることは、やはりそれほど難しいことはなかった。それでも手数は3枚のときより相当多くなった。5枚になったらどうか？もうやってはいられないくらい大変になりそうだということは想像できた。

大貴は部屋の中をぐるぐる回りながら——ホロがあとをつける——、マチ子先生が言った『10枚になったら？20枚になったら？』ということを考えているようだ。どのように説明したらいいか考えているのだろう。

頭の中のイメージを、私に説明しようとしているのか、ただ独り言で言っているのか、しゃべり始めた。

「まず、3枚の場合はできた。手数は7手だった。4枚の場合、一番下の一番大きい円板は残して、上の3枚は右の棒に移せる、7手で。残された一番大きな円板を左に移す。右の3枚の円板を、3枚を移動させるやり方で左に移せばいい。あとの方の移動で、一枚目を頂点に移すか左に移すかということだけ間違えなければいいんだ」

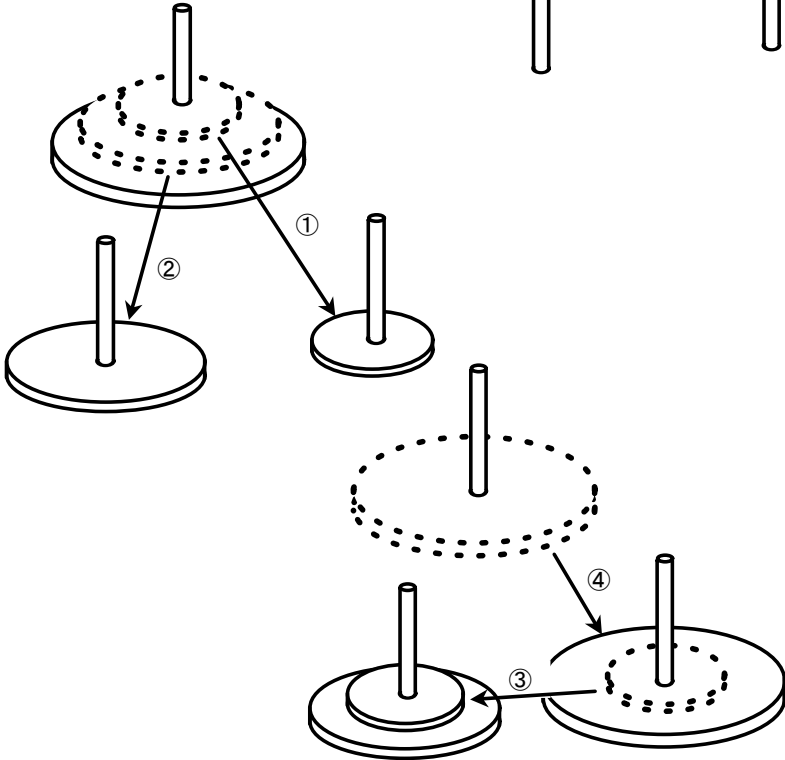
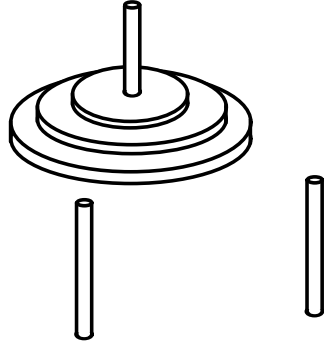
「4枚のときの手数は、7手プラス1手プラス7手だから、15手

ハノイの塔(3枚の場合)

1本の棒にささった大中小3枚の円板を、次の2つのルールに従って、他の棒に移動させる。

ルール1: 一度に動かせるのは1枚の円板のみ。

ルール2: 小さい円板の上に大きい円板をのせてはいけない。



(続く)

だ」

「5枚、6枚になっても同じじゃないか。4枚ができれば5枚でもできる。5枚ができれば6枚でもできる。そうだよ、これは何枚でもできるんだ」

私はわかったようなわからないような気分で、大貴のしゃべりを聞いていた。大貴が続けた。

「手数は、・・・4枚のとき、3枚のときの2倍プラス1、5枚のときは4枚のときの2倍プラス1。そうだよ、2倍プラス1、2倍プラス1で増えていくんだ」

「大貴、私にはまだ良くわからないけど、解決だね！」

大貴はうれしそうにうなづく。

「ああ、ねえさん、解決だよ」

* * * * *

「2人とも良くわかったわね。完べきよ」

マチ子先生にそう言われて、私はあわてて言った。

「いえ、私は4枚までは実際に動かしてみましたが、それより先のことは大貴が考えたんです」

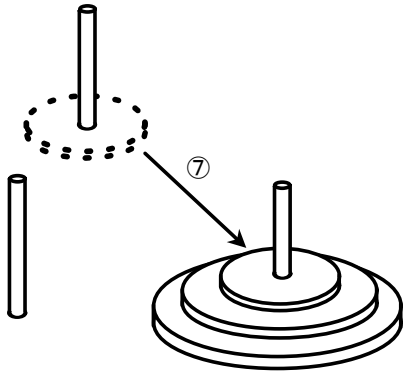
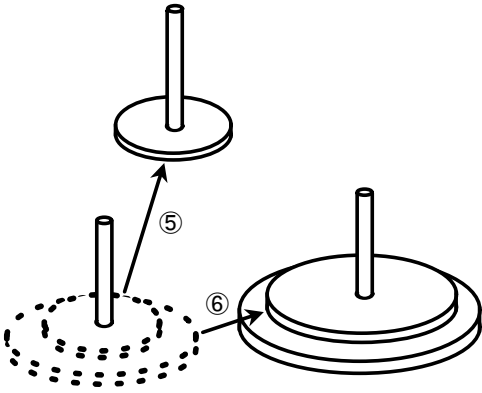
「でも、2人ともすごいわ」

マチ子先生は私を置き去りにしないようにと配慮してくださっている。

「この問題は、数学の面白い話につながるのよ」

マチ子先生がそう言うと、大貴は興味深そうに身を乗り出した。

「3枚ができれば4枚でもできる。4枚ができれば5枚でもできる。これを繰り返せば、100枚でも200枚でも、何枚でもできる訳ね。もっとも、100枚もあったら、一秒間に一回動かすとして、この地



球はおろかこの宇宙も消滅しているでしょうね」

「えっ、えー!？」

私たちは一斉に声をあげた。

「私が中学生のころ読んだ本では、この『ハノイの塔』の円板は64枚だったけど、それでも地球上のすべてが消え去るとなっていたわ。まあ、それは置いといて、何枚でもできるという話に戻るわね」

『なにか面白い話が始まりそうだ』

大貴も興味深そうな顔をして待ち構えている。

「将棋倒しってわかる？」

私には聞いたことがある。大貴は首を傾げている。

「今の子はドミノ倒しの方がわかりやすいかな？そう、将棋の駒でもドミノの板でもいいけど、適当な間隔でずっと並べて、最初のを倒すと次々と倒れて、全部倒れてしまうというあれのこと。昔は将棋の駒で遊んだものよ」

『これが、ハノイの塔とどう関係してくるのか？』

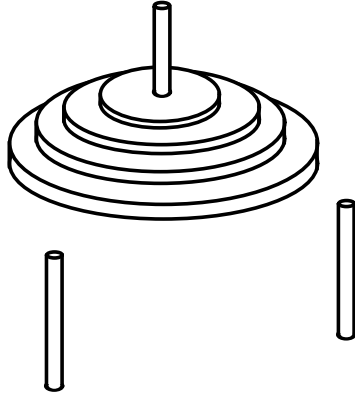
「改めて聞くけど、ドミノ倒しで全部倒れるようにするには何に注意すればいいか。いいえ、聞くほどのこともないわね。板と板の間をあけ過ぎずせばめ過ぎずに並べればいい。どの板も、1つ手前の板が倒れたら自分も倒れるようにすればいいわけね。じゃあ、すべての板がそのように並べられたとするわよ。全部の板を倒すには、あとはどうすればいい？」

「一番先頭を倒せば」

私が答えると、マチ子先生がうなずいた。大貴は何やらほかのことを考えているようだ。

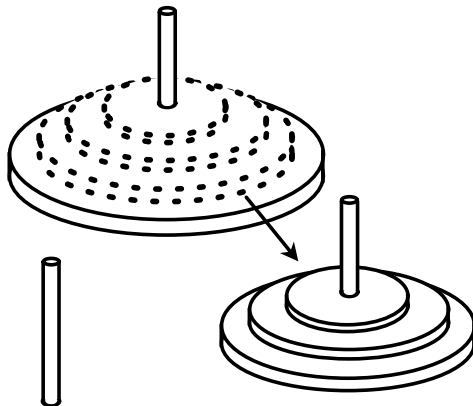
円板が4枚のとき

{1}



上の3枚を、先ほどのやり方で他の棒へ移動する。
(7手で完了)

{2}



1手目=最初に一番小さい円板を
移動する=はこちらの棒。

(続く)

「大貴君は何か考えているの？」

「ハノイの塔も、3枚ができれば4枚ができる。何枚あっても同じことの繰り返しでできる。ドミノ倒しとハノイの塔は同じようだということはわかるんだけど、何が数学的なのかなって？」

「そうか、もうそこまで考えていたのね？それじゃ、今の話をきちんと整理するわよ」

マチ子先生はそう言うと、少し姿勢を正すようにして続けた。

「ドミノの板が何枚並んでいてもすべて倒れるには何が言えればいいのか、2つのことが言えればいいの。1つは n 番目の板が倒れたら n プラス1番目の板も倒れる。もう1つは先頭が倒れる。ハノイの塔も、 n 枚の円板が移動できれば、それを使って n プラス1枚の円板も移動させられることが言えて、1枚の円板は勿論移動できるから何枚でも移動させられるって言えることになるの。数学的に言うとな、数 n に関することで、 n が1の時成り立つことと、 n がある数値で成り立つとすると、それより1大きい数値でも成り立つ。この2つのことが言えれば、どんな n でも成り立つ、という証明法でね、数学的帰納法っていうの。名前はいかめしいけど、ドミノ倒しやハノイの塔で考えればわかりやすいわね。 n が1で成り立つことが言えているので、 n プラス1、つまり2でも成り立つ。 n が2で成り立てば、 n プラス1、つまり3で成り立つ。あとはそれを繰り返していけば、 n がいくつでも成り立つことになるわね」

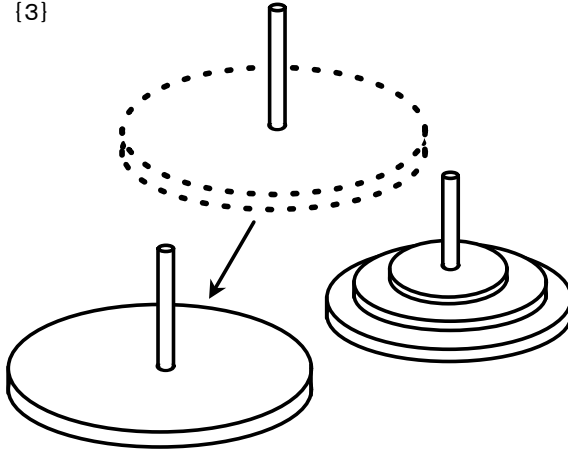
「そうか！」

大貴が感動したように声をあげた。

「でも、マチ子先生、数学的帰納法で証明できる問題ってどんなのがありますか？」

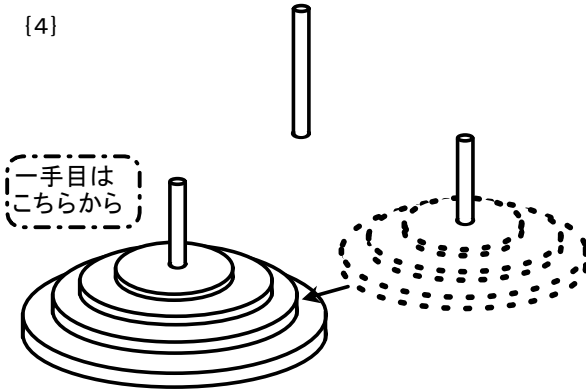
4枚目をもう一つの棒に移動する。

[3]



再び、3枚を移動するやり方で移動する。

[4]



[1]~[4]の手数は、 $7+1+7=15$ [(3枚のときの手数) $\times 2+1$]

「数学的帰納法がよく使われるのは高校の数学になってからの。数式に関する証明で使われるから。残念ながら小中学生のあなたたちに示せる適当な問題が見つからないの。でも、こんなのはどう？」

マチ子先生は紙と鉛筆を用意して、たての線を5本引いた。

「たての線は何本でもいいの。これはアミダくじよ」

そう言って、横の線を何本も書き込んでいった。

「小さい子でもよく知ってるわよね。横の線を何本引いても、必ずたての線の上と下とは1対1になるって。みんな経験的に知っていることだけど、じゃあどうしてかって聞かれたらどうする？」

「分かり切ったことのようにだけど、改めて説明しなさいって言われたら困りますね」

私がそう言うと、大貴が立ち上がって歩き始めた。数学的帰納法にあてはめようとしているのか。

「横の線が1本のときは成り立つ」

大貴がつぶやき、マチ子先生がうなずく。

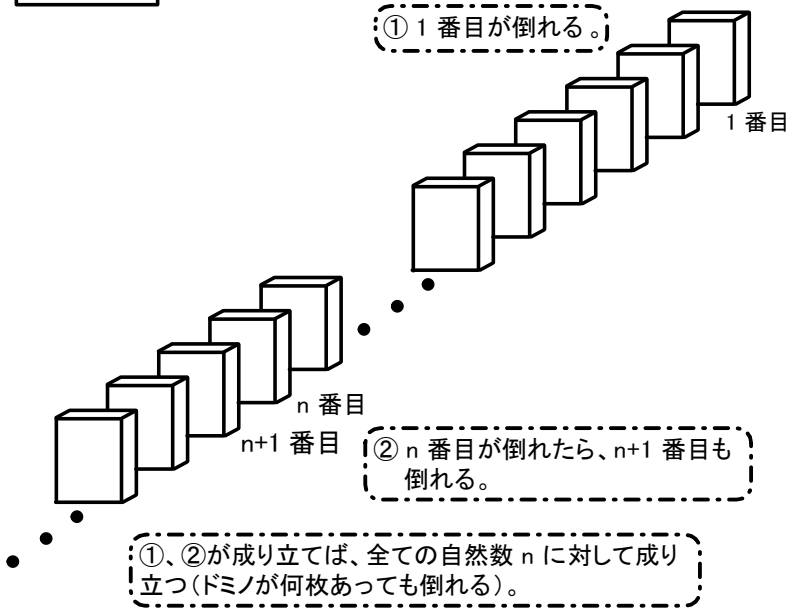
「 n 本で成り立ったとすると、・・・」

『トボ増がんばれ！』私は心の中で応援する。大貴は何周かソファとテーブルの周りを回った後、ちょこんとマチ子先生の隣に座った。そして、マチ子先生がさっき書いたアミダくじの真ん中あたりに、横棒を1本書き加えた。

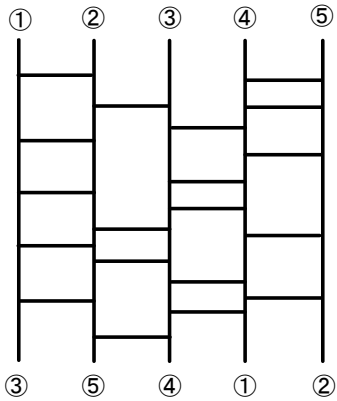
「マチ子先生がさっき書いたアミダくじの横の線が n 本とします。そして僕が後から1本書き加えて、横の線が n プラス1本になりました。ここに1本水平線を引きます」

大貴は、アミダくじ全体で一番下に位置する横線のすぐ上に、水平な線を引いた。その水平線はたての5本の線を全部突っ切る線だ。

ドミノ倒し



アミダくじ



アミダくじはその線で、大部分を占める上部と、横線が一本だけの下部の2つに分けられた。

「この水平線より上の部分は横棒が n 本でアミダくじとして成立しているとします。つまり、すべてのたて線の上と下は1対1です。この線の下は n プラス1本目の横棒が1つだけで、アミダくじのルールに従えば、横棒の両側が入れ替わるだけだから、やっぱり1対1は成り立ちます。 n 本で成り立っていれば、 n プラス1本目を描き加えても成り立ちます」

「大貴君、お見事！ちゃんと数学的帰納法の意味を理解して証明することができたわね。帰納法ってむずかしい言い方だけど、簡単に言うとね、ある特定のケースで成り立つことを示すことで、一般的に成り立つことを導こうとする考え方なの。この数学的帰納法という証明法は覚えておいて、使えそうな場面があったら使うように心掛けるといいわ」

『数学的帰納法か、なんだかずいぶんハイレベルな話のようだ。大貴の頭にはしっかりとどまったに違いない』

「マチ子先生、僕にもわかるような数学的帰納法を使う問題があったらまた教えてください」

「それがね、あなたたちが考えている間に1つ思いついたのよ」

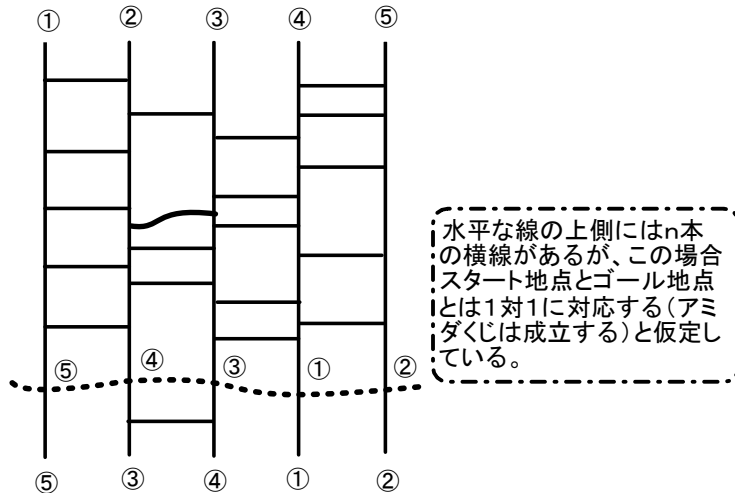
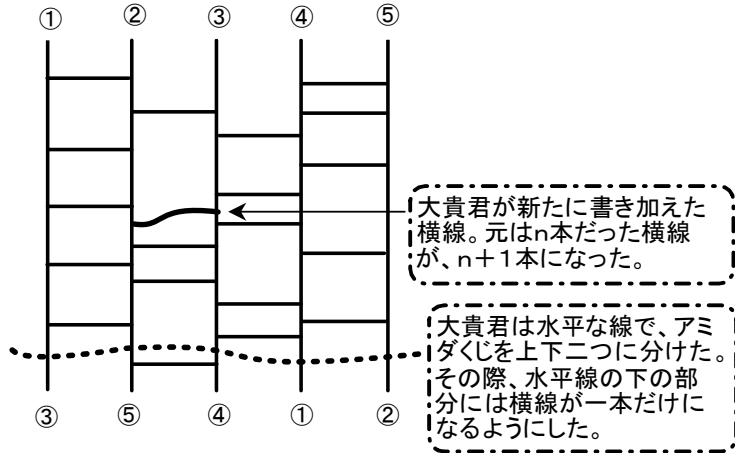
「えっ、何ですか？」

大貴が身を乗り出す。

「さっきのハノイの塔で、手数について考えたでしょ。 n 枚の場合の手数はそれより1枚少ない場合の2倍プラス1になるって。あれから、 n 枚のときの手数を n で表すことを考えてみましょう」

マチ子先生はそう言って、紙に数値を書き並べていった。

アマダくじが成立することを、数学的帰納法で証明する



アマダくじのルールに従えば、水平な線の上の③は左のたて線に、④は右のたて線に移動する。他の3本はそのまま。よって、横線が $n+1$ 本でも成り立つ(アマダくじは成立する)。

1、3、7、15、31、・・・。

「次は、31かける2プラス1だから63ね。その次は126プラス1で127。こうして並べた数の列を見て、何か思いつかないかな？」
『前後の関係は2倍プラス1だけど、数そのもので1つつ見ていくと、・・・』

「2をどんどんかけていった数より1小さいんだ」

大貴が気が付いた。言われて私もすぐに納得できた。

「そう、ここに並んだ数は、 n を使って簡単にわせるのね。今大貴君が言ったことをそのまま式にすればいいの。真喜さんは習ったと思うけど、大貴君は知ってるかな？例えば2を3回かけることを2の3乗と言って2の右肩に小さく3を書くの。この書き方を使うと、ここに並んだ数の列の n 番目は、2の n 乗ひく1とできそうね」

『そうか。例えば4番目は、2の4乗ひく1で15。5番目は2の5乗ひく1で31。確かにそうになっている』

「ハノイの塔で、円板が n 枚のときの手数を X に小さな n を添え字として付けて表すことにして、今の式で表せることを数学的帰納法で証明してみましょう」

マチ子先生は紙に書いて説明した。大貴が納得しながら聞いている。私はなんとなくわかったような気がした。

「数学的帰納法ってすごいですね！」

大貴は感動し、さきほどからいねいな言葉づかいが続いている。気分が高まっているのがわかる。大貴はとても貴重な体験をしているようだ。マチ子先生は本当にありがたい存在だ。

「じゃあ、次の問題に行きましょうか」

大貴は聞く気満々だ。

数学的帰納法で証明する

「ハノイの塔」の問題における、円板の枚数と必要な手数の関係

枚数	手数
1	1
2	3 (2×1+1)
3	7 (2×3+1)
4	15 (2×7+1)
5	31 (2×15+1)
6	63 (2×31+1)
⋮	⋮
⋮	⋮

手数は、1、3、7、15、31、63、・・・となっているが、これらの数は次のようにも考えられる。

$$2-1, 2 \times 2-1, 2 \times 2 \times 2-1, 2 \times 2 \times 2 \times 2-1, 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2-1, 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2-1, \dots$$

つまり、円板の枚数分だけ 2 をかけ合わせた数から 1 を引いた数である。a を n 回掛け合わせた数を

a^n と書くが、この書き方を用いると次のようになる。

$$2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, 2^4-1, 2^5-1, 2^6-1, \dots$$

円板が n 枚のときの手数を X_n とすると、

$$X_n = 2^n - 1 \quad \dots (A)$$

と表せそうである。

数学的帰納法でこれを証明する。(続く)

「今度の問題はあまり数学的な深い意味にはつながらないけど、まあこういう問題で頭を使うのもいいんじゃないかな。じゃあ言うわよ。元の問題は、水そうに 16L の水が入っていて、これを 9L のマスと 7L のマスを使って 8L ずつに分けなさい、というもの。16L の水を水そうに 8L、9L のマスに 8L にしなさいということね。でも、この問題の本質は、9L と 7L のマスで 1L を作りなさい、ということなの。考えてみてね。この問題も 2 人にとって解くことはそう難しくはないと思うわ。解けたら、9 と 7 という数の意味について考えてみて。ほかの数値にしてみるとかして」

数学的帰納法で証明する（続き）

「ハノイの塔」において、円板の枚数を n 枚としたとき、必要な手数が

$$X_n = 2^n - 1 \cdots (A)$$

と表せることを証明する。

[証明]

1) (A) において、 $n=1$ とすると、

$$X_1 = 2^1 - 1 = 1$$

円板が1枚のとき手数は1だから、(A)は $n=1$ のとき成り立つ。

2) 円板が n 枚のとき、(A)が成り立つとする。このとき円板が $n+1$ 枚でも (A)の式が成り立つことを示す。

$n+1$ 枚のときの手数 X_{n+1} は、 n 枚のときの手数 X_n の 2倍プラス1であるから、

$$X_{n+1} = 2 \times X_n + 1$$

(A) を代入すると、(注:(A)は n 枚のとき成り立つと仮定している)

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 2 \times (2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

この等式は (A)で n を $n+1$ にした式になっている。

これで、(A)が $n+1$ のときにも成り立つことを示せた。

よって、1)、2)より、(A)は任意の自然数 n に対して成り立つ。

(証明終り)

$$X_{n+1} = 2X_n + 1 \quad (X_1 = 1)$$

という関係式(漸化式という)から、ただちに上の (A)の等式を導くこともできる。これは高校で習う。

5) 9Lと7Lのマスで1Lを作る * * * * *

私たちはまず、マチ子先生が元の問題と言った、9Lと7Lのマスで16Lの水を8Lずつに分けることを考えた。

大貴は例によって、紙も鉛筆も使わずにうろうろ歩き回っている。私は9Lと7Lのマスを紙に描いていろいろやってみた。やってすぐに気が付いたが、マチ子先生が後から言ったように、1Lを作ることができれば、1Lを9Lのマスに入れて、7Lを加えれば8Lができるし、水そうにも8Lを残すことができる。

さらに水を入れたり移したりしているうちに、9Lの水を7Lに入れば、2Lを作ることができるし、その2Lを7Lのマスに入れば、5Lの空きを作ることができることなどが見えてきた。つまり、9と7をうまく組合せれば、5や2が作れる。ほかの数もこのようにして作れるのだろう。いずれ1も同じように・・・。そろそろ大貴が「できた！」と言いそうだと思っていたら、案の定だ。

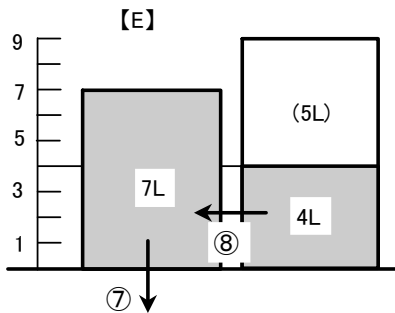
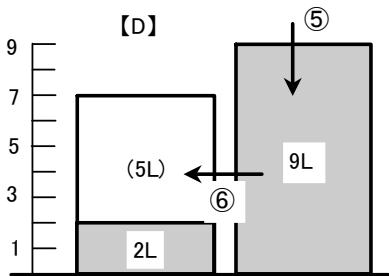
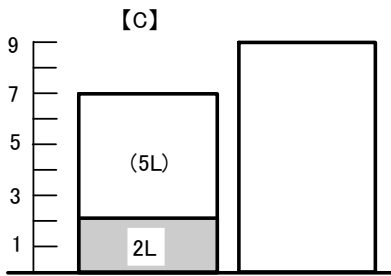
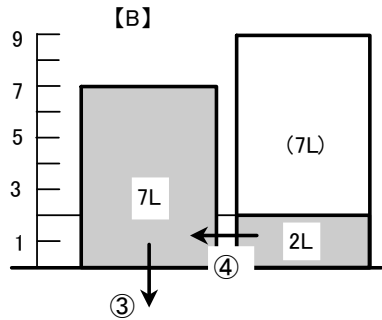
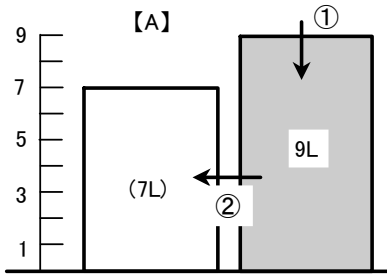
大貴は頭の中でたどりついた1に至る過程を、口にしながら式に書いてみせた。

「9ひく7は2、7ひく2は5、9ひく5は4、7ひく4は3、9ひく3は6、7ひく6は1。ほらね、1ができた」

私には、この6個の式を見せられただけでは、1Lを作る問題が解けたことになるのか、すぐにはわからない。確かに、最初の2つの式あたりまでは意味がわかったが、その先も同じように考えられるのかは、図を描いてやってみなければわからない。私が首をひねっていると、大貴は図を描き始めた。

9Lのマスに残った2Lを7Lのマスを空にしたあと入れる。5Lの空きができる。ここまでは自分で考えたからわかる。9Lのマス

9Lのマスと7Lのマスで1Lを作る



続く

でこの5Lを満たすと4Lが残る。『そうか、新たに4ができた』。7Lのマスに空にして4Lを入れると、3Lの空きができる。『3ができた。あとは、これの繰り返しか』。9Lで3Lを満たすと、6Lができる。7Lのマスに空にして、この6Lを入れれば1Lの空きができる。『大貴が示した6個の式の意味がわかった！』。

私が感動していると、大貴はもう次のことを考えているようだ。6個の式をじっくり見つめている。私も同じように見つめる。大貴が次に何を言い出すか、私には見当もつかない。

「ねえさん、6個の式の右側を見て。順番はばらばらだけど、1から6までの数が出てくるね。7より小さい数が全部、しかもどれも1回ずつ出てくる。そうなら、6回以下で1が出てくることになる」

なるほど大貴の言う通りだ。1から6までの数がすべて1回ずつ出てくる。とても奇妙なことが起きているように感じた。式の左側は、最初は $9-7$ だけど、あとは7と9が交互に並び、引く数は1つ手前の引き算の答えだ。どうしてこういうことになるのか。いくら見てもわかりそうにない。

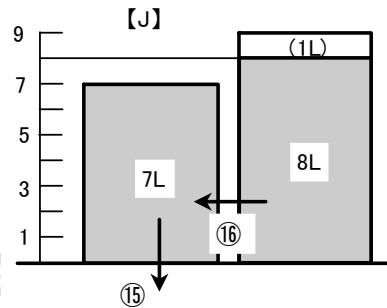
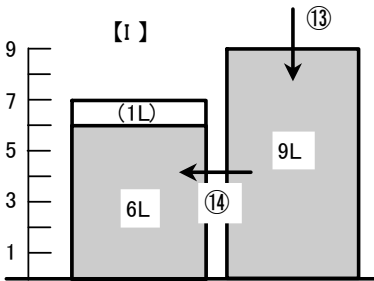
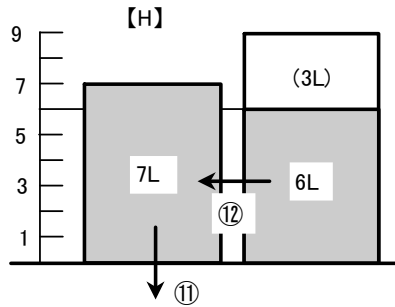
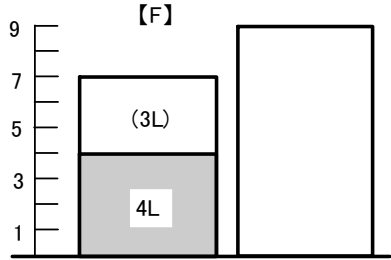
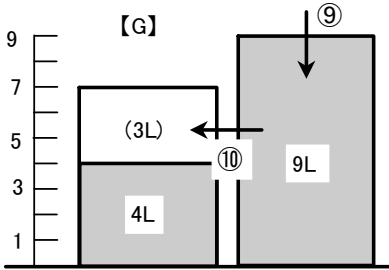
「ねえさん、最初の2つの数が10と8だったらどうなる？ $10-8$ は2、 $8-2$ は6、 $10-6$ は4、・・・」

「そうか、2つの数が偶数だと、引き算した答えも必ず偶数だから、いつまでたっても1にはならない」

「いろいろやってみると面白そうだよ。偶数と奇数だとどうなるかとか、差が2でないような2つの奇数の場合はどうなるか」

大貴がそう言っているいろいろなやり始めた。私もやってみた。偶数と奇数では1にたどり着く時とうまくいかない時がある。12と9のように、どちらも3の倍数だと、差も3の倍数になるのでだめだ。

9Lのますと7Lのますで1Lを作る(続き)



7Lを空にした後(15)、8Lを移せば(16)、1Lが残る。

奇数同士でも、11 と 7 の場合には 1 にならない。結局、必ずうまくいくのは、2 つの数がどちらも奇数で、隣り合った数（差が 2）の場合だ。

そうして、大貴と私はほとんど同時に気が付いた。奇数番目の式は 2 から始まって、4、6、8 と偶数で増えていき、偶数番目の式は、5、3、1 と減っていく。13 と 11 のように大きな数でも同じだ。だから、奇数番目の式で必ず 1 にたどり着くし、式の右側には、小さい方の数（13 と 11 だったら 11）より小さい数がすべて一回ずつ現れる。

「問題のスタートは 9L と 7L。差は 2L。その 2L を使うと 7L のマスが 5L のマスとして使える。9L と 5L の差は 4L。この 4L を使えば、7L のマスは 3L として使える。9L と 3L、そして 7L なら誰だってすぐに気が付く」

これが大貴の結論だった。

* * * * *

今回は私がマチ子先生に話した。マチ子先生は「完べき、何も言うことはないわ」とほめてくれた。そして、言った。

「2 人とも良くわかりそうだから、今の話を一般論でやってみましょう」

「一般論？」

2 人が同時に聞き返すと、

「そう、一般論。具体的な数ではなくて、どんな数でもあてはまるように文字を使うの。数学ではとても大事なことよ」

マチ子先生はそう言って説明を始めた。

「2 人が気が付いたように、2 つの数を隣り合った奇数にするとい

9Lのますと7Lのますで1Lを作る

【最初の2つの数が9と7のとき、どのように1にたどりつくか？】

$9-7=2$... 9Lと7Lのますで、2Lができた ⇒ 7Lへ

$7-2=5$... 5Lの空きができた ⇒ 5Lのますとして使える

$9-5=4$... 9Lと5Lのますで、4Lができた ⇒ 7Lへ

$7-4=3$... 3Lの空きができた ⇒ 3Lのますとして使える

$9-3=6$... 9Lと3Lのますで、6Lができた ⇒ 7Lへ

$7-6=1$... 1Lの空きができた ⇒ 1Lのますとして使える

【気が付いたこと】

- ① 等式の右辺に、1から6まで(7未満)の全ての整数が現れている。
- ② 奇数番目の式では、右辺の値が、2、4、6、と偶数で増えている。
- ③ 偶数番目の式では、右辺の値が、5、3、1、と奇数で減っている。
(したがって、いずれは1にたどりつく?)

【疑問に思ったこと】

(問題のスタート時の2つの数は、隣り合った奇数だが)

- ① 2つの数がともに偶数の場合はどうなるか？
- ② 2つの数が偶数と奇数だったらどうなるか？

いわね。そこで、2つの数を、 $2n+1$ と $2n-1$ とおくの。nはプラスの整数よ。この2つの数が奇数であることはいいわね？どちらも2の倍数より1大きいか、1小さいかだから。そして差は2だから隣り合った奇数。例えば、nを4にすれば、9と7だし、5にすれば、11と9。つまり、このようにおけば、どんな奇数の組も表せるといふ訳。こういうのを一般論ていうの」

大貴が「なるほど」とうなずく。私にもわかった。そうしてマチ子先生は、いままで2つの具体的な数でやってきたことを、 $2n+1$ と $2n-1$ でやっていった。

奇数番目の式の右側は、2、4、6、・・・と偶数になり、偶数番目は、 $2n-3$ 、 $2n-5$ 、 $2n-7$ 、・・・となる。nで表されたこれらの式は $2n-1$ より2だけ小さい数 $2n-3$ から始まって、すべて奇数であることはわかるし、引く数が増えていくから、どんどん小さくなっていくこともわかる。奇数で小さくなっていくから、いずれ1になる。具体的な数でやった場合と同じだ。

「これが一般論か！」

大貴が感動した声をあげる。私も同じように感動した。

「これが数学なんですね！」

「よく分かりました」

大貴が大きくこっくりしながら言い、私は

「一般論でやって、この問題がすっかり理解できた気分です」

と言った。

「そうよ。一般論というのはそういうものなの」

大貴は満足そうだ。私もそう快な気分だ。

「よかったわ。2人とも満足そうで」

9Lのますと7Lのますで1Lを作る(続き)

【 いろいろな数で試してみる 】

・ 10と8の場合

$$10-8=2$$

$$8-2=6$$

この先やるまでもなく、偶数引く偶数は偶数だから、1にはならない。

・ 10と7の場合(差が3)

$$10-7=3$$

$$7-3=4$$

$$10-4=6$$

$$7-6=1$$

奇数行は差の3ずつ増える。偶数行は3ずつ減り、すぐに1になる。

・ 11と8の場合(差が3)

$$11-8=3$$

$$8-3=5$$

$$11-5=6$$

$$8-6=2$$

$$11-2=9$$

$$8-9=-1$$

偶数行が3ずつ減るが、1を飛び越えてしまう。

【 一般的にどうなるか 】

$2n+1$ と $2n-1$ とする(隣り合った2つの奇数)

$$(2n+1) - (2n-1) = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(2n-1) - 2 = 2n-3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(2n+1) - (2n-3) = 4 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(2n-1) - 4 = 2n-5 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$(2n+1) - (2n-5) = 6 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$(2n-1) - 6 = 2n-7 \quad \dots \textcircled{6}$$

奇数行(①、③、⑤ ...) : 2、4、6、...

偶数行(②、④、⑥ ...) : $2n-3$ 、 $2n-5$ 、 $2n-7$ 、...

偶数行で、ある2の倍数から奇数を引いていくので、いずれ1になる。

大貴は、もう次の問題を待ち構えているようだ。マチ子先生はそんな大貴を見て、ニコニコしながら言った。

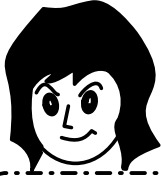
「じゃあ、次の問題にいきましょうか」

私たちは「はい」と言って待ち構える。

「今度のは、少し苦勞すると思うわ。いい？じゃあ。いくわよ。2人とも『天びん』ってわかるわよね。2つのお皿があって、それらにのせたものの重さが同じならつり合って水平になるし、異なれば重い方に傾く。これから出す問題は、いくつかの球に1個だけ他のものと重さが異なるものが混ざっていて、その球をこの天びんを何回か使って見つけ出すというものよ。1個だけ重いものがあるとか軽いものがあるというのなら簡単に解けるけど、重さが他と異なるということしかわからいとなると、簡単ではないの。答え方は、これが重い、これが軽いというように答えなければならない。問題は球が12個あって、その中の異質なものを天びんを3回使って見つける方法を答えなさい、というものよ」

問題の意味はわかった。マチ子先生はそのことを2人に確認すると、さらに付け加えた。

「いきなり12個で考えてもいいけど、練習としてまず4個の場合で考えてみるといいわ。4個の場合、天びんは何回必要かと言うと、やっぱり3回。4個の場合に3回必要なのに、12個でも3回でできるなんて、ちょっと意外な感じがするでしょ？じゃあ、考えてみて」



ペントミノ



ペントミノというのは、同じ大きさの5個の正方形を、辺どうし接するよう
に合わせたもので、ていねいにかざると、12個あることがわかります。
上下、左右に対称なものは区別されないことに注意しましょう。

横に5個並んだもの



横に4個並んだものに残りの1個をつける

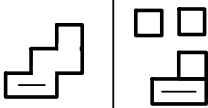


横に3個並んだものに残りの2個をつける



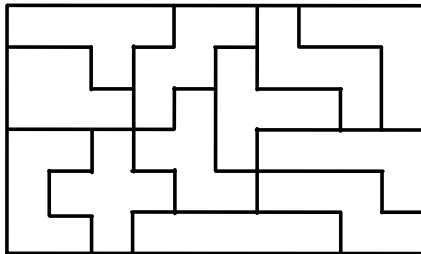
(←残りが3個並びの片側だけにつく場合→)

横に2個並んだものに残りの3個をつける



注: この先残りのつけ方は左のものしかない。
これと異なるつけ方をすると、上のどれか
と同じものになる。

上で求められた12個のピースは、全部で60個の正方形で作ることが
できます。そして、この12個のピースは6×10の長方形にぴったり収めるこ
とができるのです。これは「ペントミノ」と呼ばれるパズルとして知られてい
ます。



左は解の一例です。やっ
てみるとわかりますが、このよ
うな解を見つけるのは簡単で
はありません。
ちなみに解は2339通りある
ことが知られています。

6) 天びんで重さのことなるものを見つける * * * * *

私たちはまずマチ子先生が最後に言った、4個の場合で考えることにした。

4個の球をA、B、C、Dとする。

最初にAとBをのせてつり合ったとする。このときAとBは正常だ。2回目にCとDをのせてCが下がれば、Cが重いかDが軽い。あとは、Cと正常なAをのせて、Cが下がればCが重し、つり合えばDが軽いとわかる。3回必要だ。

1回目にAが下がったとする。Aが重いかBが軽い。CとDは正常だ。あとはAとC、BとDをのせればわかる。2回で終わることもあるけど、やはり3回必要だ。

最初に2個ずつA、BとC、Dでのせた場合はどうか。当然どちらかに傾く。A、Bの方がさがったとする。2回目にAとBをのせて傾けば終わりだ。下がったほうが重い。もしもつり合うと、これでは終わらない。CとDをのせて上がったほうが軽い。このやり方でも3回だ。

確かに、マチ子先生が言った通り、4個でも3回であることが納得できた

大貴が面白いことに気が付いた。

「4個の球の他に正常な球がいくつかあって、使ってもいいというのなら、2回でできるよ」

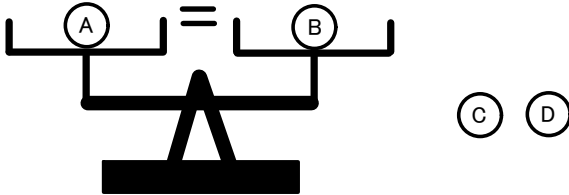
私が考えてもみなかったことだ。

「4個のうちの3個の球と正常だと分かっている3個とをのせる。つり合えば、残りの1個が異常だからあと1回でわかる。最初に傾けば、その3個の中に重いのがあるか軽いのがあるかわかるから、

天びんを使って、4個の球から重さが異なるものを見つけ出す

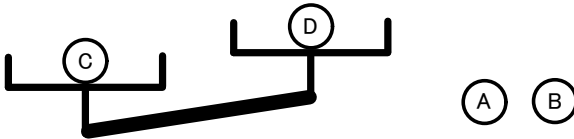
4個の球を (A) (B) (C) (D) とする

【1回目】AとBを天びんにのせる



つり合った・・・A、Bは正常

【2回目】CとDを天びんにのせる



Cが重いかDが軽い

【3回目】CとAを天びんにのせる

Cが下がった・・・Cが重い
つり合った・・・Dが軽い

もう1回でできるよ。

なるほど、確かにそうだ。大貴はそんなことまで考えていたのかと感心する。このあと大貴と話したのだが、マチ子先生が話していた通り、重いか軽いかが分かっているならば、問題はかなり簡単なものになる。例えば3個のうちに1個重いがあると分かっているならば、1個ずつのせれば1回でわかるし。9個でも最初に3個ずつのせれば2回でわかる。27個でも最初に9個ずつのせれば3回でわかる。重いか軽いかがわからないということで、問題が難しくなっていることが理解できた。

大貴はすでに12個の場合で考えているようだ。歩きながらつぶやくのが聞こえた。

「最初は4個ずつのせる。これしかないはずだ」

私もそう思う。

「つり合ったとする」

私もその状況を想像する。異常なのは残りの4個の中にある。

「この場合は簡単だ。さっき考えたように、残りの4個のうちの3個と正常な3個をのせればいいんだ」

私にもわかった。大貴が4個の場合で説明したように、正常だと分かっている球がいくつもあるので、あと2回でできる。

問題は、最初に4個ずつのせてつり合わなかった場合だ。大貴のトボトボ歩きがなかなかとどまりそうにない。今回の問題は大貴にとってもかなり難問のようだ。

結局、未解決状態のままでマチ子先生の家に行くことになった。

大貴はおそらく不本意で不愉快な心境でいたのだろうが、マチ子先生に教を乞いたいという今までにはなかった謙虚さで、マチ子

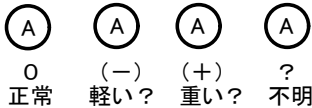
天秤を3回使って、12個の球から重さが異なるものを見つけ出す

12個の球を



とする。

球が正常の場合を0、軽いか正常の場合を(-)、重いか正常の場合を(+)、不明の場合を?で表すことにする。



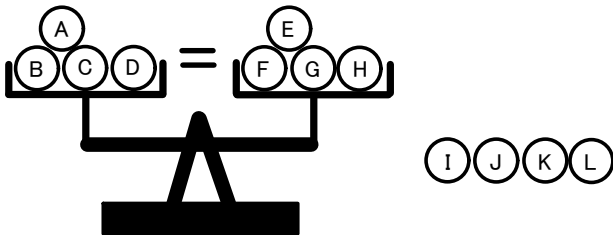
12個の球を、



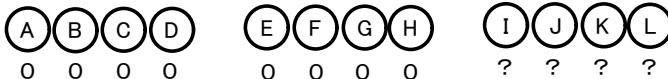
の3つのグループに分ける。

【1回目】(A、B、C、D) と (E、F、G、H) を天秤にのせる

[つり合った場合]



A ~ H の8個はすべて正常で、I ~ L の4個のどれかが異常



【2回目】(I、J、K) と (A、B、C) をのせる

先生に頭を下げた。

「1回目に4個ずつのせてつり合わなかった場合にどうするか。私もずいぶん悩んだわ。私は悩んだ末に1つの方法に思い当たったけど、他にももっとうまい方法があるかも知れないわ。そういうものとして、私のこれからの話を聞いてね」

マチ子先生はそう言うと、図を描きながら説明を始めた。

「重いが入っている可能性のある4個と、軽いが入っている可能性のある4個。これをどちらかにしぼって、しかも3個以下にしたいのよね。あなたたちも考えたように、重いか軽いかがわかった3個以下なら、残る1回で解決できるわけだから。それじゃあ、たった1回でそのことがわかるようにするには、どのようなせ方をすればいいか。まず片側に重い可能性のある4個のうちの3個をのせて、反対側に正常な3個をのせる。これで、もし重い方に傾いてくれば解決するけど、つりあった場合は軽い可能性の4個が残るからだめね」

そう言って、マチ子先生は私たちの顔を見た。ここまではいいわね？と確かめるように。

「はい、私たちもそこまでは考えました」

私がそう言うと、大貴が待ちきれないというように言った。

「その先どう考えるんですか？」

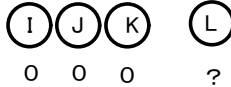
「そこで私が考えたのは、重い可能性のある3個の側に軽い可能性のある4個のうちの1個をのせて、正常な3個の側に、重い可能性のある残り1個をのせるの」

大貴が立ち上がって歩き出した。マチ子先生が愉快そうに見つめる。私は紙の方を見て考えた。どうせ大貴に先を越されるだろうと

[つり合った場合]



I、J、Kは正常。Lが異常



【3回目】 Lと他の正常な球をのせれば、Lが重いか軽いかがわかる

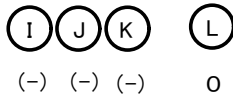
【1回目】 (A、B、C、D)と(E、F、G、H)でつり合い

【2回目】 (I、J、K)と(A、B、C)をのせて

[つり合わなかった場合 (I、J、Kが上がったとする)]



I、J、Kのどれかが軽い



【3回目】 IとJをのせて、つり合わなければ、上がったほうが軽い。つり合えば、Kが軽い

2回目で(I、J、K)が下がった場合も同様のやり方で、どれが重いかわかる

思いながら。

「そうか！左に傾いても、右に傾いても、つり合っても、残りの1回でできる」

マチ子先生がニコニコしながらうなずいている。1人取り残された私は、あせってもしょうがないと自分に言い聞かせて、もう一度よく考えてみた。『左が下がったら、右には重い可能性の1個と正常な3個で上がることはないはずだから、左の重い可能性の3個の中に重いのがあることがわかる。これは後1回で解決だ。右が下がったら、左にのせた軽い可能性のある1個と、右にのせた重い可能性のある1個にしばらくはぼられる。これもどちらかを正常な1個と比べればわかる。最後につり合った場合、今のせた球はすべて正常だから、残されたのは軽い可能性のある3個だ。これも1回でできる』

「解けた！」

心の中で発したつもりが、つい口をついて出てしまった。そして、少し遅れたが私も2人のニコニコに加わることができた。

「私は今の方法しか考えたことがないけど、他にうまい解決法があるのかしらね」

めずらしく大貴が「わかりません」と言って横に首を振った。

「私も思いつかないけど、実はね、こういうやり方があるというのを、昔何かで見たことがあるの」

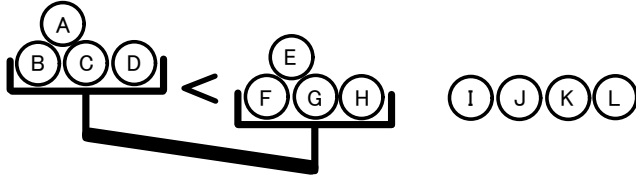
大貴が「えーっ!？」と言って身を乗り出した。

「今まで私たちがやってたのとは全く違うやり方よ。興味深い内容だから説明するわね」

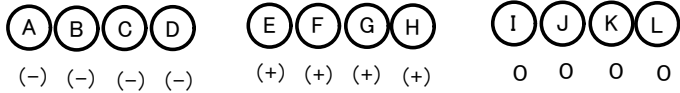
そう言って、マチ子先生は紙に書き始めた。000から始まってたてに並べるように、001、002、010、011、012、・・・、100、101、

【1回目】 (A、B、C、D)と(E、F、G、H)をのせて

[つり合わなかった場合(A、B、C、Dが上がったとする)]

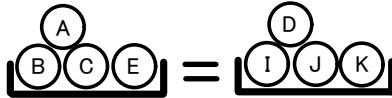


A、B、C、D に軽いものがあるか、E、F、G、H に重いものがある！
I、J、K、L は正常

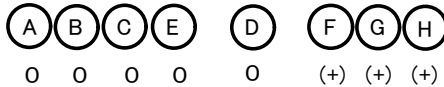


【2回目】 (A、B、C、E)と(D、I、J、K)をのせる

[つり合った場合]



A~E は正常。F、G、H のどれかが重い！



【3回目】 FとGをくらべる

下がったほうが重い
つり合ったらHが重い

102、110、と書いて、次の数は、今まで書いてきたたての列から少し右に外れて、しかも一番下の数より少し下に111と書いた。さらに続けて、111を通るたての線に対して左側に書いた数に対象になるように、下から順に、112、120、121、122、200、・・・、212、220、221、222、と書いた。両側にたてに並んだ2列の数がちょうど対戦相手のようになっている。

「最初と最後の000、222は消します。そうすると、12組のペアができるわね。そうそう、今書いた0と1と2の数の並べ方については後で説明するわ。さて、この後どうするかと言うと、この12組のペアから、どちらか一方を取り出して12個の数を作るんだけど、次のようになるようにするの。12個の3桁の数は、左側が0と1と2が4個ずつ、真ん中がやっぱり0と1と2が4個ずつ、右側もそう。そうなるようにペアのどちらかを選んでいくの。ちょっと苦労するかもしれないけど、私が作ったのを見せるわね」

マチ子先生はそう言って、12個の数を丸で囲んだ。

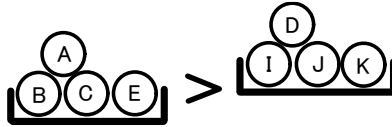
「ほかにも選び方はいくらでもあるはずよ。機械的に互い違いに選んでできるんならいいけど、そうではないのね」

マチ子先生は12個の数の左側、真ん中、右側が0と1と2が4個ずつあることを、私たちに確認させながら数えた。

「これで準備オーケーよ。この12個の数を12個の球に1つずつ割り当てます。そして、1回目は左側が0の4個と2の4個を天びんにのせます。もし左が下がったら0、かっこして2と記録します。つり合ったら1。右が下がったら2、かっこして0。2回目は真ん中の数が0の4個と2の4個をのせます。そして同じように記録します。3回目は右側の数で同じことをします。3回が終わったところ

[【2回目】でつり合わなかった場合]

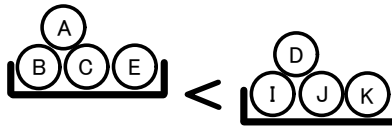
1)



{ E が重いか、D が軽い }

【3回目】 E か D を他の正常のものと同くらべる

2)



{ A、B、C のどれかが軽い }

【3回目】 A と C をくらべる

12個の球に、適当な3桁の数(または文字)を割り振って、機械的に異質な球を見つける方法

まず、三進法の3桁以下の数(000~222)を次のようにU字型に並べる

- 000 — 222
- ① 001 — 221
- ② 002 — 220
- ③ 010 — 212
- ④ 011 — 211
- ⑤ 012 — 210
- ⑥ 020 — 202
- ⑦ 021 — 201
- ⑧ 022 — 200
- ⑨ 100 — 122
- ⑩ 101 — 121
- ⑪ 102 — 120
- ⑫ 110 — 112
- 111

①~⑫の12組のペアから、それぞれどちらか一方を選んで取り出すが、その際取り出された12個の数が次の条件を満たすようにする。

条件) 12個の3桁の数の、左側も中央も右側も、0と1と2が4個ずつになるようにする。

で、記録した数が 012 なら 012 の球が重いと分かります。もしも 012 の球がなかったら、かっこに書かれた数が 210 のはずで、この数の球が軽いと分かります」

大貴が「ひえー！」とすっとんきょうな声を出した。私もつられて同じような声を発してしまった。

「すごいことを考える人がいるんですね」

私がそう言うと、大貴は立ち上がって歩き始めた。マチ子先生が私に説明するように話し始めた。

「今最初に書いた 0 と 1 と 2 の数は規則的に並べていったのはわかるでしょ？ 000、つまり 0 から 222 まで 27 個あったけど、これは三進法で 3 桁の数を書いていったの」

私は大事そうな話なので大貴に強い調子で声を掛けた。

「大貴！聞かなくていいの？三進法の話よ」

大貴がちょこんと座った。

「私たちが普通に使っているのは十進法ね。0 から 9 まで行って、次の数を 2 桁の数 1 と 0 の 10 で表す。この書き方のおかげで、どんな大きな数でも 0 から 9 の 10 個の数字で表せるわけね。0、1、2 の 3 個の数字で表そうというのが三進法。0、1、2 の次の数は 2 桁の 10 で表す。聞いたことがあるかも知れないけど、コンピューターの世界では二進法が使われるの。すべての数を 0 と 1 だけで表すのね」

すると大貴が言った。

「プログラムでは十六進法も使われますよね」

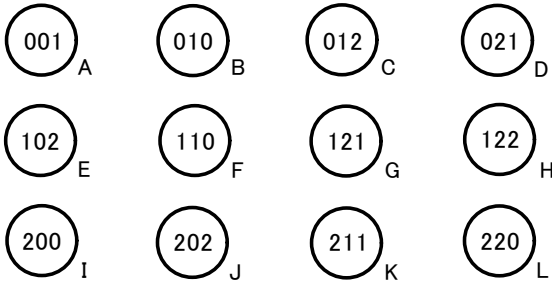
「そうか、大貴君、コンピューターの本も読んだことがあるんだ。それじゃあ、n 進法のことにも良く分かっているわね」

12個の数の取り出し方の一例(いずれも①~⑫のペアの片方)

- ① 001 ② 220 ③ 010 ④ 211 ⑤ 012 ⑥ 202
⑦ 021 ⑧ 200 ⑨ 122 ⑩ 121 ⑪ 102 ⑫ 110

これらの12個の数は、左側も中央も右側も、0と1と2が4個ずつになっている

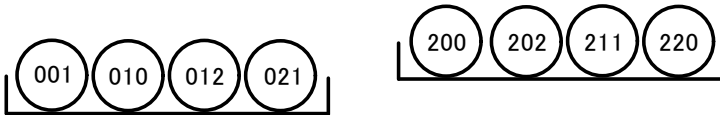
この12個の数を12個の球に1つずつふりわける。



次のように3回はかりにのせ、結果を記録する

【1回目】

左側の数字が0のもの(A、B、C、D)を天びんの左側に、
左側の数字が2のもの(I、J、K、L)を天びんの右側に
のせる。



左が下がったら、0(2)と記録(0のものが重いか2のものが軽い)
右が下がったら、2(0)と記録(2のものが重いか0のものが軽い)
つり合ったら1と記録 上の場合 0(2)

「はい。でも天びんの問題で三進法を使うなんて、すごいことですね」

「私も初めて知ったときは感動したわ」

「ところで、マチ子先生。12 個の球の問題ですけど、もしも球が 11 個だったらどうなりますか？」

マチ子先生が「えっ！」と言って驚いた顔に変わる。

「ほかに正常と分かっている球があって使っているのなら、もちろん今の三進法の 12 個の数でうまくいきますが、11 個しかなかったら」

「大貴君、そんなこと考えていたんだ」

マチ子先生が「うーん」と言って考え込んだ。

「ひょっとするとうまい手があるかもしれないけど、今すぐには思いつかないわ」

「今の三進法じゃなくて、マチ子先生が解いたやり方なら 11 個でもできます。4 個ずつのせてつり合わなかったときの 2 回目で、正常な球は 3 個で済むので 11 個でも大丈夫です」

「ということは、10 個以下でも何個でもできるのね？」

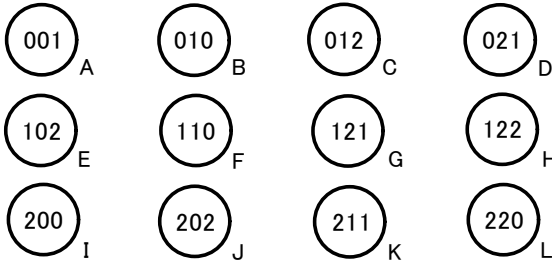
私が聞くと、大貴は立ち上がって歩きながら話し始めた。

「まだ全部は考えていないけど、多分大丈夫と思う。10 個の場合は、1 回目に 4 個ずつのせる訳にはいかないよ。つり合わなかったときに、正常なのが 2 個しかないから。最初に 3 個ずつのせればいいんじゃないかな？」

マチ子先生は、感心した顔で大貴を見つめている。

「大貴君、そこまで考えているなんて驚きだわ」

「でも、解けなかったんだからだめですよ」



【2回目】

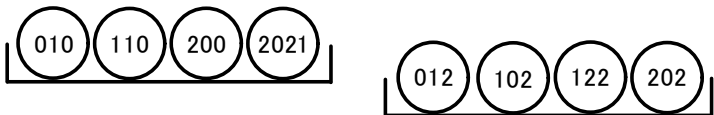
中央の数字が0のもの(A、E、I、J)を天秤の左側に、
中央の数字が2のもの(D、G、H、L)を天秤の右側に
のせる。



左が下がったら、0(2)と記録(0のものが重いか2のものが軽い)
右が下がったら、2(0)と記録(2のものが重いか0のものが軽い)
つり合ったら1と記録 上の場合 1

【3回目】

右側の数字が0のもの(B、F、I、L)を天秤の左側に、
右側の数字が2のもの(C、E、H、J)を天秤の右側に
のせる。



1回目、2回目と同様に記録 上の場合 2(0)

【1】、【2】、【3】より、012のもの(C)が重いとわかる。
もしも、記録が101(121)の場合は、121のもの(G)が軽いとわかる。

大貴はそう言うと、カバンから先回借りていった本を取り出し、「この間の本を返します」と言って立ち上がった。

マチ子先生も立ち上がって「じゃあ、次の本を見つけに行く？」と言い、3人で息子さんの部屋へ行った。

「大貴君、ゆっくり選んでいいわ」

マチ子先生がそう言って、大貴を1人残し、私とマチ子先生は元の部屋へ戻った。先生は2人きりになると少し神妙な表情で話し始めた。

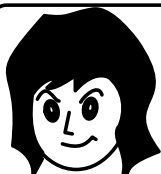
「大貴君とうちの子、本当によく似ているの。大貴君を見ていると、うちの子の小さい頃を見ているみたい。2人とも考え出すと、じっとしてられなくなったり、何かに夢中になると人の話に耳を向けられなくなったりするのね。真喜さんは、そういう子は生まれつきだということはあるわね？」

「はい、親からも聞いていますし、本で読んだこともあります」

「今は、自閉症スペクトラムっていう言い方をするのね。うちの子が小さい頃はアスペルガーっていう言い方をしていたけど。普通の人にはなかなかわかってもらえないし、人との関わり方に関するところだから、トラブルが起きやすいし、本当にかわいそう。自分のせいではないのよね」

そのとき、大貴が入ってきた。大貴は次に借りたい本を手にしていった。マチ子先生はとっさに話を切り替えた。

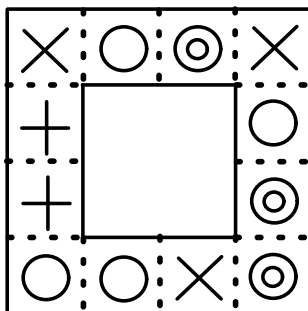
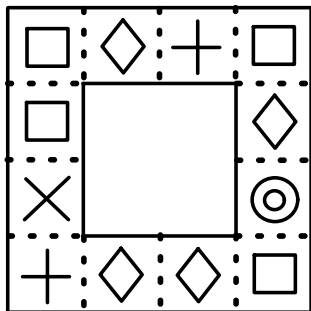
「じゃあ、次の問題にいくわよ。点が3個あったとします。A、B、Cとするわね、AとB、BとC、CとAを線で結ぶんだけど、その線の色を赤か青のどちらかにします。3本とも赤だったり青だったり、赤と青の両方が使われたりいろいろできるわね。話をわかりや



色(形)合わせのパズル

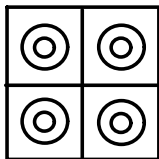
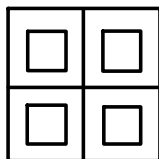


少し厚めの紙を用意して、1辺の長さが4(10~12cm程度)の正方形を1枚作ります。そしてその中心から1辺が2の正方形を切り取ります。1辺が1の正方形が12個連なった状態になります。左の図にあるような図形を書き込みます。どんな形の図形を用いてもよいです(ただし、上下、左右に対称であるようにする)、色を塗るのもよいです。同じ図形の場所は必ず同じ図形、色にします。左右に裏返して、同じく右の図のように書き込むか色塗ります。



表裏合わせて24個のマスが4個ずつ6種類の形(色)になります。

点線(および実線)で折り曲げて



のように、同じパターンがそろるようにします。この時、紙はきれいに折りたたまれていなければなりません。

6種類全て出来れば完了です。□(左上)が簡単なのでまずやってみるとよいでしょう。

すくするために、3個の点は一直線上にないことにして、結ぶ線は直線で考えることにします。この先出てくる点も、どれも3点以上が同じ直線上にはないことにします。まあ、円周上の点で考えるとわかり易いかな？さて、それでは点が4個になったら、線は何本引けるでしょうか？」

「6本です」

大貴が答えた。私にもすぐにわかった。

「そうね、4個の点を円周上のA、B、C、Dとして、四角形ABCDで考えるとわかりやすいわね。それでは、4個の点を頂点とする三角形はいくつできるかな」

「4個です」

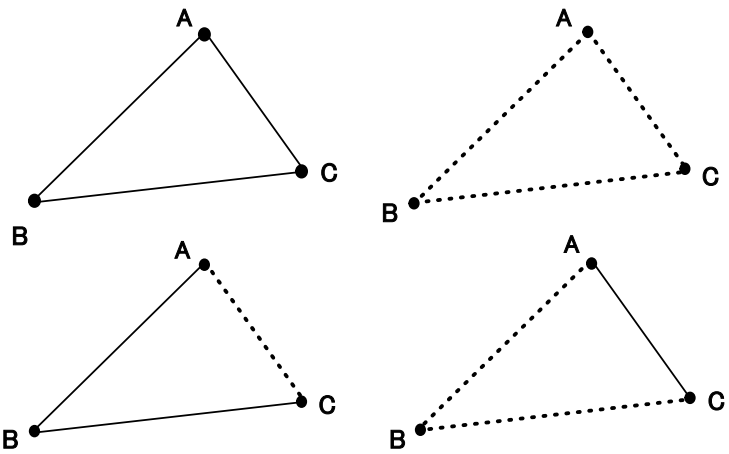
2人同時に答えた。

「これも簡単ね。ところで、その4個のどの三角形もすべて、3辺が同じ色にならないようにできるかな。そう、これも簡単にわかるわね。たとえば、四角形ABCDと考えると、4つの辺を赤にして、2本の対角線を青にすれば、どの三角形も2つの辺が赤で、1つの辺が青になって、同じ色にはならない。さて、ここからが問題よ。

点が6個あったとします。すべての点どうしを赤か青の線で結ぶと、3辺とも同じ色の三角形が必ずできてしまいます。どうしてかを説明しなさい」

マチ子先生が、「問題の意味はわかったわね？」と確認し、私たちはうなずいた。そして、マチ子先生の家を後にした。

点が3個の場合



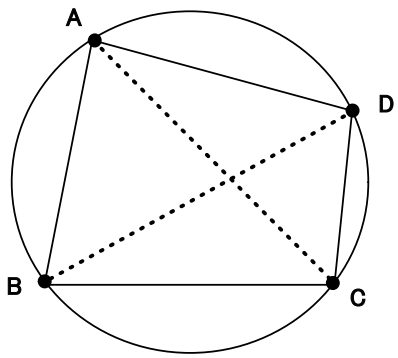
3個の点A、B、Cを2色の線(—、- - -)で結ぶ線の結び方は他にもある。

点が4個の場合

円周上の4点で考える。

4個の点を結ぶ線は全部で6本ある。

三角形は、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ の4個あるが線の色を右のようにすると、どの三角形も、3辺が同じ色にはならない。



7) 6個の点を2色の線で結ぶと * * * * *

私たちは、紙に丸を描き、まずその円周上に5個の点をとって、三角形がいくつできるか調べた。今回は大貴も珍しくテーブルに座り、紙に描いて考えている。ホロがそのとなりに座る。

五角形を作って、対角線をすべて引くと、五角形の中に、星ができた。三角形が全部で10個できることはすぐにわかった。うまい数え方も見当がついた。五角形の隣り合う2つの辺を使う三角形は、1つの頂点に1個ずつできるから5個。五角形の1つの辺だけを使う三角形が5個。五角形の辺を1個も使わない三角形はできないから、合計10個だ。

10個の三角形はどれも必ず五角形の辺を1個か2個使うから、四角形のとくと同じように、五角形の辺を赤にして、対角線を青にすれば、10個の三角形はすべて辺が1色にはならない。

ここまでは2人で一緒に考えた。

点が6個の場合。できる三角形の個数がかなり多くなる。五角形までと違って、六角形の辺を1つも使わない三角形もできる。それでもうまい数え方をすれば、何個できるかの計算はできそう。しかし、その先どう考えるか。話は急に難しくなった。大貴が立ち上がった。

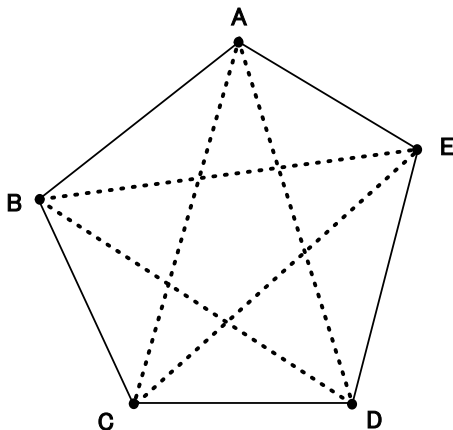
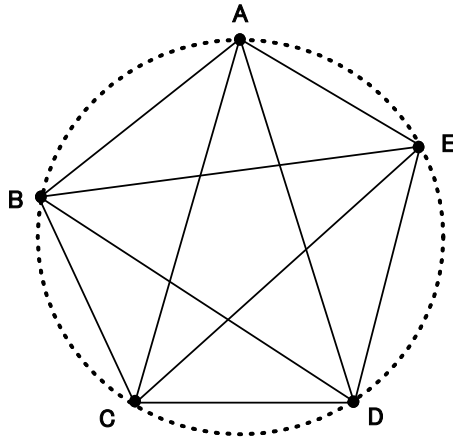
まず、五角形のとくと同じように考えて、六角形の辺のとなり合った2個の辺を使うのは6個、1辺だけを使うのは、1つの辺で2個ずつできるので12個、1辺も使わないのは2個だ。6プラス12プラス2だから20。

「20個だ！」

私が勢い込んで言うと、大貴は「そうだよ、ねえさん。問題は

点が5個の場合

五角形の隣り合う2辺を使う三角形は、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle DEA$ 、 $\triangle EAD$ の5個。
 五角形の1辺だけを使う三角形は、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DEB$ 、 $\triangle EAC$ の5個。
 五角形の辺を使わない三角形はできない。
 したがって、三角形は全部で10個できる。



左のように2色の線で結ぶと10個のどの三角形も、3つの辺がすべて同じ色という三角形にはならない。

点が5個の場合は、「3つの辺がすべて同じ色の三角形が少なくとも1個ある」ということにはならない。

そのあとどうするかだよ」と言った。

『なんだ、三角形が 20 個できることはもう分かっていたのか』私はせっかくだが計算できたのにと、がっかりした。

三角形がすべて、3 辺が同じ色にならないようにできること、つまり、同じ色の三角形が存在しないこともあり得ることは、五角形以下では簡単に言えた。ところが、点が 6 個の六角形になると、どうしても 3 辺が同じ色の三角形ができてしまうということを示さなければならない。

六角形の場合が五角形までの場合と異なるのは、六角形の辺を 1 つも使わない三角形ができることだ。2 個できる。

私とテーブルの周りをぐるぐる回っていたトボ僧のぶつぶつが始まった。

「点が 6 個になったということは・・・」

私が「えっ？」というと、ちょこんと椅子に座り、図を描き始めた。

「1 つの点から 5 本の線が引ける。だから、赤か青のどちらかの線は 3 本以上になる」

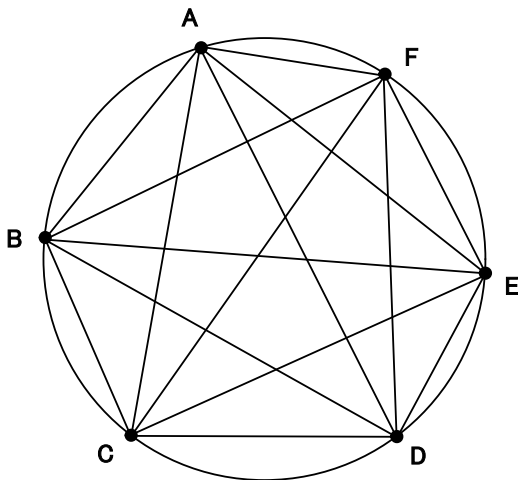
それは私にもわかる。改めて 6 個の点を描き、順に A、B、・・・、F とする。A から引けるのは 5 本でそのうち 3 本を赤とする。大貴は六角形からではなく 1 つの点から始めようとしている。

「AB、AC、AD を赤とする。もしも BC が赤なら三角形 ABC が赤だけになる。CD が赤なら三角形 ACD が赤だけ、DB が赤なら三角形 ADB が赤だけになる。そうでないとしたら、・・・」

そこまで聞いて私にもわかった。三角形 ABC が 3 辺とも赤でないとしたら BC が青のはず。同じように CD も、DB も青のはず。

点が6個の場合

{6個の点で三角形は何個できるか}



{六角形の隣り合う2辺を使う三角形は、
△ABC、…、△FAB の **6個**。
六角形の1辺だけを使うのは、
△ABD、△ABE、…、△FAC、△FAD の **12個**。
六角形の辺を使わないのは、△ACEと△BDF の **2個**。
合計 **20個**。}

すると三角形 BCD の 3 辺が全部青になる。

「そうか。大貴すごい！解けたね」

大貴が満足そうにニコニコしている。

* * * * *

マチ子先生に私が図を描いて説明した。大貴はマチ子先生の了解を得て、息子さんの部屋へ本を見に行っている。

「まず点が 5 個以下の場合で考えました」

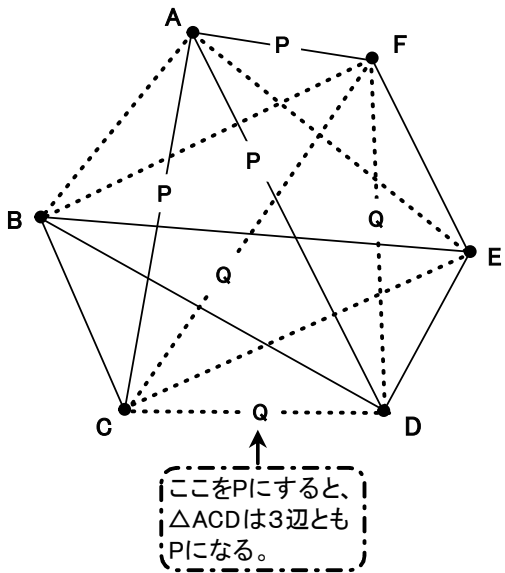
マチ子先生が深くうなずいている。それでいいのよという表情で。私は嬉しくなって続けた。

「点が 5 個のときまでは、できる三角形を全部描いて、すべての三角形が一色では描けないようにすることができます。つまり、どうしても一色になる三角形があるとは言えません。ここまでは私にも分かりました」

「真喜さん、素晴らしい。この問題の 1 つ目のポイントはそのことよ。『点が 6 個の場合、3 辺とも同じ色の三角形が少なくとも 1 つは存在する』ということの意味は、まさしくそのことね。点が 5 個以下だと、3 辺とも同じ色の三角形が 1 つも存在しないような図が描き得る。そのような例が示せるということね。数学ではね、あることが成り立つことを明らかにするためにはきちんとした証明が必要だけど、逆に成り立たないことを示すには、そういう例を 1 つでも示せばいいの。そういう例を『反例』と言うのよ。あなたが今、点が 5 個の場合に、すべてが一色にならないような図が描けてしまう、と言ったけど、それがまさしく反例なの。この問題は、6 個の場合に、一色だけの三角形が少なくとも 1 個は存在することを示せという問題だけど、5 個以下の場合には成り立たない。あな

点が6個の場合(続き)

点が6個の場合は、「3辺が同じ色の三角形が少なくとも1個できる」ことを示す(「すべての三角形で3辺が同じ色にならないようにすることはできない」ことを示す)。



点Aで考える。
 A以外に点は5個あるから、Aから引く線は5本ある。
 従って、P、Qどちらかの色は少なくとも3本引くことになる。
 そこで、AC、AD、AFが同じ色(P)とする。
 CDがPだと、 $\triangle ACD$ が1つの色Pとなるので、もう1つの色(Q)にする。
 同じように $\triangle ADF$ でDFをQ、 $\triangle AFC$ でFCをQとすると、
 $\triangle CDF$ が3辺とも同じ色Qになる。
 よって、「点が6個の場合は、3辺が同じ色になる三角形が少なくとも1個は存在する」という結論が成り立つ。

たはそのことを証明したのよ」

証明したなんて、考えてもみなかったことだ。

「証明したなんて、とてもうれしいです。本当のことはよくわかりませんが」

「例えばね、分かり易い例で言うと、6の倍数は3の倍数よね。でも3の倍数は6の倍数か。そうではないことを言うには、1つでいいから成り立たない例をあげればいいの。9がそうね。9は3の倍数だけど6の倍数ではない。成り立たない例はいくらでもあるけど、1つあげるだけで十分。それが反例なの。反例が言えたので、3の倍数は6の倍数というのは間違いだと示せたというわけ」

「大貴も聞いていればいいのか、大事な話ですよ」

「いつかあなたからしてあげて。大貴君は今、プログラミングのことに夢中みたいだから」

「それで、6個の場合ですが、これから先は大貴が考えたことです」

私はそう言って、大貴が思いついた示し方を話した。

「恐れ入りました。完べきな解答よ。本当にすごい子ね」

ちょうど、そこへ大貴が入ってきた。

「マチ子先生、今度はこの本を貸してください」

「えっ、前回のJavaの本はもう読み終えたの？」

「これもJavaの本です」

私は大貴に向かって言った。

「大貴の解答は完べきだって。よかったわね。でも、今数学の大事な話をマチ子先生から聞いていたのよ」

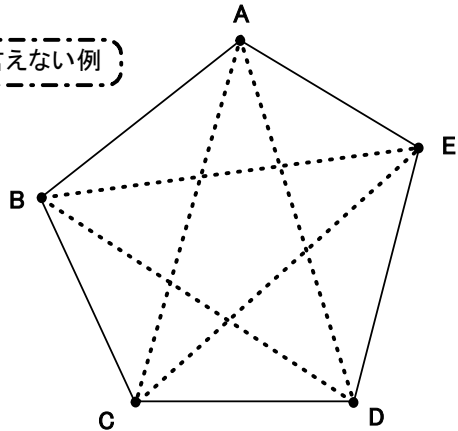
「そう、極めてだいじな話。あとで真喜さんから教わってね」

大貴は私に教われと言われて、少し不満そうな顔をしている。

点が5個の場合には言えないことを示す

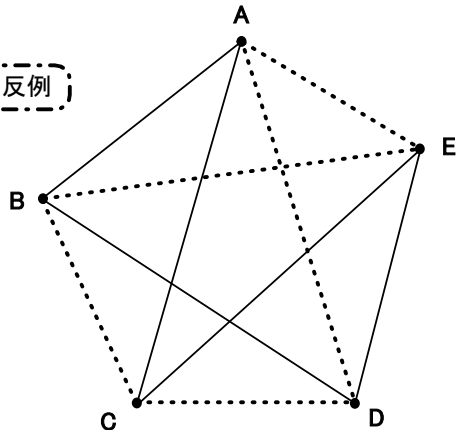
点が5個の場合は、
「3つの辺がすべて同じ色の三角形が少なくとも1個ある」
とは言えないことを示す。

言えない例



言えない例を1つあげれば、言えないことの証明になる。
このような例を「反例」という。

他の反例



言えないことを証明するには反例を1つあげればよい。

「大貴君、プログラミングの本に夢中みたいだけど、次の問題は どうしますか？」

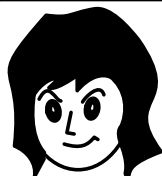
大貴はマチ子先生の隣にちょこんと座り、「お願いします」と言 っ て、頭をペコリと下げた。マチ子先生がニコニコしながら話し始 め た。

「今度のはちょっと難しいわよ。でも有名などてもいい問題」

マチ子先生は大貴と私を対等に見るように、こちらへ体を向けた。 「本題に入る前に、まず私が創作した話から。でもこれも本題を解 く 鍵になるからね」

マチ子先生が創作した話というのは、要約すると次のようなもの だ っ た。

『天に昇った2人の罪人A、Bが神様に会った。神様は2人に向 っ て言った。「心を改めて背に天使の羽が生えたら地上に舞い降 り ることができる。しかし、自分の背に生えたかどうかは見えない」。 あるとき、AはBの背に羽が生えているのを見た。BもAの背に 生 えているのを見た。でもお互い自分に生えたかはわからないし、 相 手に教えて相手だけが地上にもどるのはしゃくなので黙ってい た。 それを見て神様はAに「2人のうちの少なくとも1人の背に 羽 が生えたぞ」と教えた。Aは現にBに生えているのだから、それ は 何のヒントにもならないと考えた。そのとき神様はBにも同じこ と を教えていて、BもAと全く同じように考えた。2人がどうする こ と もできないまま日が暮れてしまった。翌日、神様は2人を前に して「2人のうちの少なくとも1人の背に羽が生えたぞ」と、全く 同 じことを言った。2人は顔を見合わせ、ほぼ同時に自分の背に生 えたことを確信し、我先にと地上を目指して飛び降りた。(話のお



「少なくとも1つ」「全ては～でない」
の意味



たとえば白黒合わせて球が3個あるとき、色の組み合わせは次の4通り
があります。

- ○ ○ … ①
- ○ ○ … ②
- ● ○ … ③
- ● ● … ④

ここで、「少なくとも1個は白」という言い方は、

＝「白が1個は含まれる」

＝「全ては黒でない」

という意味で、上の①か②か③のどれかです。

また、「全て黒でない」と言ったら、「3個とも白」ですから①です。

「全ては黒でない」と「全て黒でない」という言い方は「は」が有るか無いか
の違いですが、意味は全く異なるので注意しなければなりません。

（「少なくとも1個は白」＝「全ては黒でない」）の否定は①、②、③の否定
ですから、④の「全て黒」です。

【例1】

3個の自然数 x, y, z が全ては奇数でないとき、3個の積は偶数になる。

<理由>

x, y, z は全ては奇数でない

⇒ x, y, z の少なくとも1個は偶数(2の倍数)

⇒ x, y, z の積は2の倍数になるから偶数

【例2】

3個のサイコロを同時に振ったとき、目の和は13だった。少なくとも1個
は5以上の目が出たはず。

<理由>

「少なくとも1個は5以上」でなかった、つまり「3個とも4以下」とする。こ
のとき、目の和は12以下だから13にはなりえない。つまり、「3個とも4
以下」ではないはずだから、「少なくとも1個は5以上」である。

ち) 2人の背の羽は時間がたっていたせいかな、みるみるしぼんでいった』

これから話す本題を考える前にまずは今の話の意味を考えて、ということだった。そしてマチ子先生は本題を話した。

「元の問題は3人。背に天使の羽は不自然だから、おでこにシールを貼ることにするわね。赤と白のシールがそれぞれ何枚もあります。3人に目をつむらせて、全員のおでこに赤のシールを貼ります。目を開けさせて3人を向かい合わせにします。それぞれ他の2人のおでこは見えるけど、自分のおでこは見えません。そして3人に向かって『あなたたちの少なくとも1人のおでこのシールは赤色です。自分のおでこが赤色だと確信が持てたら手を挙げて』と言います。3人はしばらく考えていたけど、そのうち1人が手を挙げた。ひょっとしたら3人がほとんど同時にかもしれません。いずれにしてもどうしてわかったか、という問題よ。さっきの天使の羽の問題から考えるといいわ」

大貴のトボトボ歩きが始まると、マチ子先生が私にそっとささやいた。

「大貴君、今回のような問題は苦手かもしれないわね」

私がどうして?という顔をすると、マチ子先生が続けて話した。「今回の問題はね、自分以外の人がどのように考えるかが解くためのカギになるの。うちの息子や大貴君のような子は、人がどう感じるかとか、どう思うかというのを想像することが苦手なのよ」

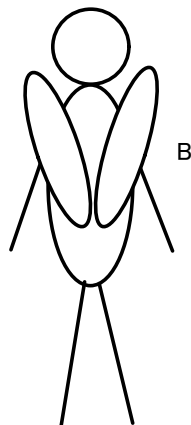
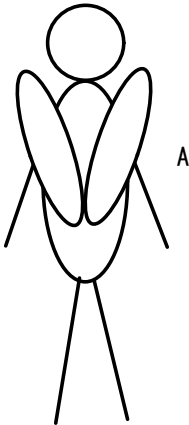
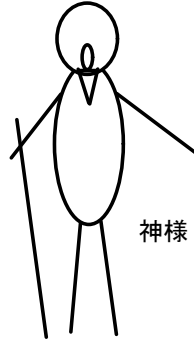
確かにそうだ。こんなことをしたら人がどう思うか、そういう判断ができないのが、大貴の人との関わりが上手くできない1つの大きな要因になっている。大貴がどう考えるか、とても興味深い。

マチ子先生が創作した問題

「少なくとも1人の背に羽がはえた」



「少なくとも1人の背に羽がはえた」



神様は、A、Bそれぞれに同じことを言った。

8) 背に天使の羽は生えたか * * * * *

マチ子先生の家からの帰り道、私たちは言葉を交わすことなく問題を考えながら歩いた。珍しく大貴の口からはぶつぶつが漏れてこない。

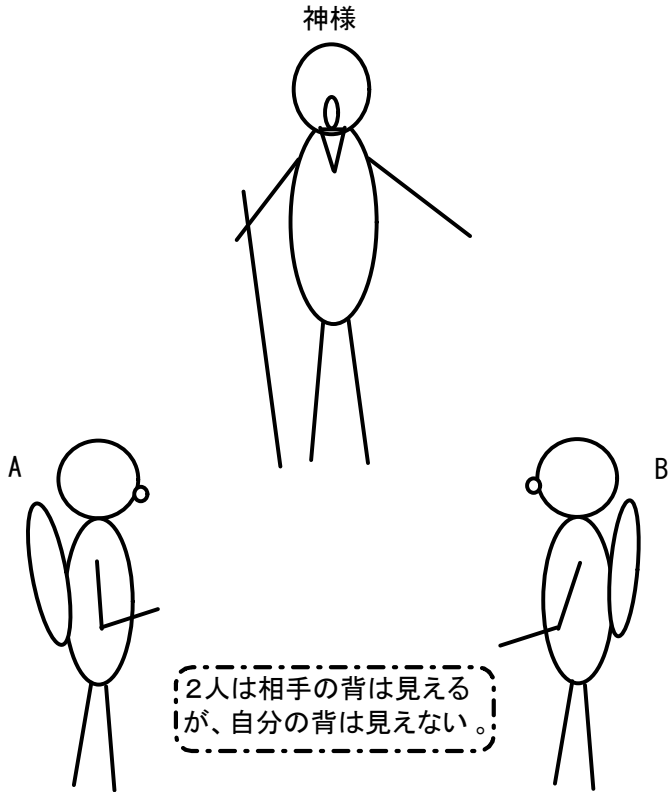
家に帰り、私たちはまずマチ子先生に言われた通り、天使の羽の問題を考えた。大貴は隣に座って、やはりじっと考えているようだ。

Aは神様から『少なくとも1人の背に羽が生えた』と聞いたとき、現にBの背に生えているのだから、何のヒントにもならないと考えた。Bも同様だ。ところが、2人を前にして神様が同じことを言ったら、たちまち2人は自分の背に生えたことを確信した。どうしてか。私はAの立場になってみた。『少なくとも1人の・・・』と言われて、Bの背を見る。生えている。『少なくとも1人』だから、自分の背にも生えたかはわからない。Bも同様だろう。だけど、もしも自分(A)の背に生えていなかったらどうか。Bはたちどころに自分(B)の背にはあると確信するはずだ。そうか、AはBの様子を見ていればいいのだ。Bが一瞬でもためらうとしたら、それはAの背に生えているからに他ならない。Bも同様だ。だから、ちょっとの間があって、2人はそれぞれ自分の背に生えたと確信したのだ。

ふと気づくと、大貴はうつらうつらしているようだ。問題を考えている最中に大貴がこんな風になるなんてまずあり得ない。よほど眠かったのか、それともマチ子先生が言っていた大貴の抱えた性格のせいなのか。私はそっとしておくことにした。

それでは何故、神様がそっと教えてくれた時にはわからなかったか。目の前に判断材料になるはずのBがいないから。そのあとB

マチ子先生が創作した問題(続き)



神様は2人を前にして言った。
「お前たちの少なくとも一人の背に天使の羽が生えたぞ」

2人は互いに見つめあった。
そして…。

と顔を合わせたときはどうか。『少なくとも1人・・・』ということ、Bも聞かされているかどうかわからないから。

「わかった！」

私は思わず声をあげた。隣の大貴が顔を上げて私の顔を見た。

「大貴、わかったよ」

「えっ、本当に？」

「天使の羽のほうの問題ね。AとBの2人を前にして、神様が『少なくとも1人の背に羽が生えたぞ』と言った場面。AはBの様子を見ていればいいの。BがAの背を見て、一瞬でもためらったら、それはAの背に羽が生えていたからよ。だってもしAに生えてなかったら、Bはためらうことなく一瞬で自分に生えたってわかるはずだから。そうでしょ？これで解決ね」

大貴はわかったようなわからないような、あいまいにうなずいた。

「でも、ためらうって言ったって、地上に向かって飛び下りるんだから命がけでしょ？ためらったかどうかなんかで確信できるかな？」

「一瞬でわかるかためらうかなんだから、それくらいの違いは判断できるでしょ？」

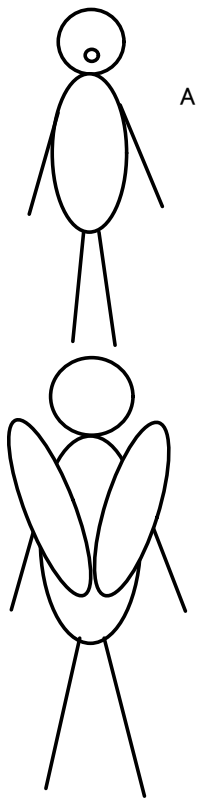
大貴はまだ納得できない様子だ。

「登場人物が大貴みたいな人間だったら、この問題は問題にならないわ！」

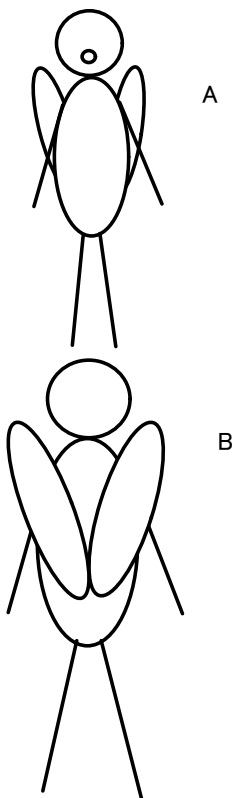
私はつい強い調子で言ってしまった。めずらしく大貴より先にわかったことで気持ちが高ぶっていたせいだ。大貴はがっくりしている。普通だったら悔しがって涙を流しそうなところなのに。大貴は、相手の様子から思っていることを読み取ることが上手くできないことを、自分自身で認識しているのかもしれない。

2人のとき

「少なくとも1人の背に羽が生えた」と言われて。



Bは自分に生えたことが一瞬でわかる。



A、Bともに自分に生えたことが一瞬ではわからない。

「じゃあ、こうするのはどうかな」私はとっさに思い付きで言った。「ためらうというのがはっきりしなくて判断しにくいというのなら、一瞬でわかるときとそうでないときをはっきり区別するの。一瞬でわからないときは、ためらうじゃなくて1秒待つことにするの。登場人物は一瞬でわかる場合はすぐに動けばいいけど、一瞬ではわからなくて、そのあとちょっと考えてわかったときは1秒後に動くことにする。つまり1秒たっても動かない場合はわからなくて動けないからということにするの。さっきの天使の羽の場合で言うと、BはAの背に生えているのを見て、一瞬ではわからなかったから、1秒間は動かない。AはBが1秒間動かないのを見て、自分に生えたとわかる。Bから見ても同じ。これならどう？」

「うん、それならわかる」

『よかった！』大貴は、すっかりではないにしても納得できたようだ『これで話を進められる』。

「じゃあ、3人のおでこにシールを貼る問題を考えようね」

大貴は今度は考え出したようだ。でもいつものようなトボ僧にはならない。

やがて大貴のぶつぶつが始まった。

「少なくとも1人は赤なんだから、おでこへの貼り方は3通りだ」

「えっ？」

「3人とも赤か、2人赤で1人白か、1人赤で2人白かの3通りだよ。少なくとも1人が赤というのはそういう意味だよ」

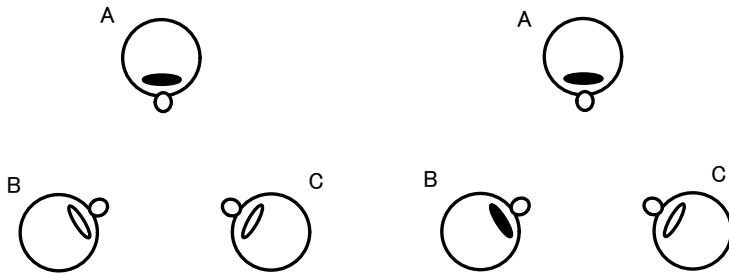
私は、3人の中の1人の立場になって他の2人が赤だからどうの、そのことは他の2人についても同じだから、などと考えていて、白が貼られたケースなど考えてもみなかった。大貴は3人を同時に見

3人の場合(おでこにシールを貼る)

「少なくとも1人は赤」という条件から、
3人のおでこへの貼り方は3通りある。

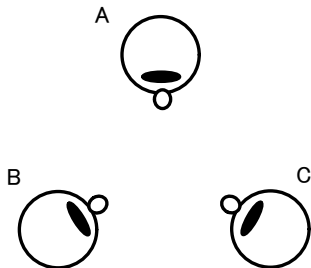
【1】1人が赤で2人が白の場合

【2】2人が赤で1人が白の場合



(3人を上から見た)

【3】3人とも赤の場合



て、少なくとも1人は赤という条件に当てはまるケースが3通りあると言っている。早くも頭の違いが出始めたか。

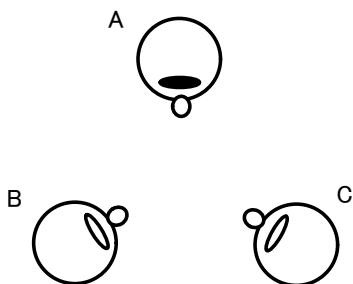
「この問題では、少なくとも1人は赤というのが条件で、誰かが赤だとわかったのも一瞬ではなくて、しばらくしてわかったんだよね。そうなるのはどういう場合だろうって考えるよ。まず白が2人だったら、それこそ一瞬にして残る1人が赤だってわかるから、白が2人ということはない。次に2人が赤で1人が白の場合どうなるか。赤の2人をA、Bとして、自分がAとするよ。Aから見てあとの2人は赤のBと白のもう1人だけど、Bの様子を見ていればいい。自分(A)が白なら、Bから見て2人が白だからBは一瞬で手を上げる。Bが一瞬で手を上げなければ、Aは自分は赤だとわかるから、1秒後に確信をもって手を上げる。だから、1秒後に誰も手を上げなければ、1人が白という場合でもないと判断できる。3人とも赤だということになるから、1秒ごとに動くとするなら、そのまた1秒後に3人の誰かが手を上げられる。いや3人が一斉に手をあげるはずだよ」

大貴は、少なくとも1人が赤というこの問題の条件から、3人のおでこへシールを貼る貼り方は3通りあって、しばらくは誰も手を上げられなかったとしたら、それは3人とも赤だからということを示した。だから、しばらくの時間がたてば、3人の誰もが手を上げられる。最初で大貴がつまずいたのは、結局は“ためらう”という言葉のあいまいさからくるものだった。そのあいまいさを、1秒という時間で置き換えることでうまく解決できた。大貴の持って生まれた脳のマイナスの機能と、私の全く偶然の思い付きが功を奏した。

* * * * *

3人の場合(続き①)

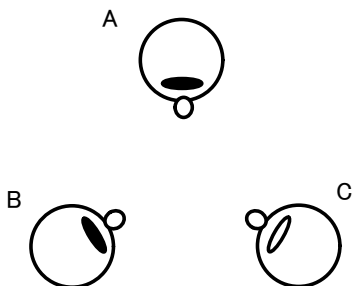
【1】1人が赤で2人が白の場合



この場合は、Aが自分は赤と一瞬でわかる

(3人を上から見た)

【2】2人が赤で1人が白の場合



この場合は、AとBは一瞬ではわからない。2人は白のCを無視して考える。すると、天使の羽の問題で、2人とも羽が生えたときと同じ状況になる。AとBはお互い相手の様子を見て、自分は赤とわかる。

今回も、私がマチ子先生に説明した。マチ子先生が予想した通り、人の顔色をうかがうとか、人がためらう様子で判断するというのは、大貴はどうも納得できないようだと言すと、マチ子先生は「やっぱり」と言っとうなずいた。そして、私の発案で、あいまいさをなくすために1秒ごとに行動に移すことにしたと言すと、マチ子先生は驚きの声をあげた。

「真喜さん、素晴らしい。とても斬新だし画期的なアイデアだわ」
珍しく、マチ子先生は興奮状態だ。たまたま大貴がそういう子だから思いついたと言くと、「大貴君には失礼だけど、とてもラッキーだったわね」と言った。

大貴はいつもの図書室に行っている。マチ子先生が続けて言った。「あいまいさ拒絶症にはこの上ない解決法だわ」

普通の感覚の人同士では思いもよらなかつただろうけど、息子さんや大貴のような人には効果的かもしれない。

「それじゃあ、1秒ごとに判断するデジタル式判断法でどう解決したか説明して」

『デジタル式判断法』か。マチ子先生も面白いことを言うなと感心する。私は、大貴が考えたことをマチ子先生に話した。

「それも完べき。今回は2人の合作でとてもうまい解答ができたわね」

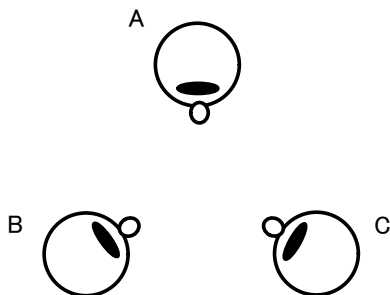
マチ子先生にそう言われて、私もとても幸福な気分になる。

「大貴君を呼びましょう。この問題にはまだ続きがあるの。2人に是非とも紹介したいわ」

私は大貴を呼びに行った。大貴は例によって、本棚の前に座り込んで読むのに夢中だった。

3人の場合(続き②)

【3】3人とも赤の場合



Aの立場になって考える。

もしも自分(A)が白だとすると、BとCは自分を無視して2人で考えることになる。すると、【2】の場合になり、一瞬ではないが、BとCは自分が赤とわかるはず。したがって、しばらく時間が過ぎてもBとCがわからないままなら、それは自分(A)が白でないから。そうしたことから、Aは自分が赤とわかる。

この考え方は、B、Cの立場でも同じようにできるから、3人はほぼ同時に自分は赤とわかる。

「大貴、おでこにシールを貼る問題、マチ子先生にとってもほめられたわよ。今回は私も」

大貴は活字を追うのに夢中で、耳から入るほうになかなか意識を向けない。

「あの問題にはまだ続きがあるんだって」

大貴がやっところちらに顔を向けた。

「是非とも聞かせたいことだって」

大貴が腰を上げ、開いた本に目を向けたままついてきた。マチ子先生が笑いながら言った。

「真喜さん、それに大貴君も。さっきのデジタル式判断法だけど、もう少しきちんと整理しましょう」

「デジタル式判断法？」

大貴が『何それ？』と言った顔をする。

「瞬間でわかる場合は瞬間で手を挙げて、瞬間でわからない場合は1秒間待つよね？1秒間の方はそれこそ1秒毎に合図をすればいいとして、一瞬の方をどうしたらいいかしら？例えば、一瞬を0.5秒以内にして、それを過ぎたら1秒後にするか」

「そうすると、赤は自分しかありえないという一瞬と、そうではないけど他の人の様子で直ちにわかる場合とがはっきりしなくなると思います」

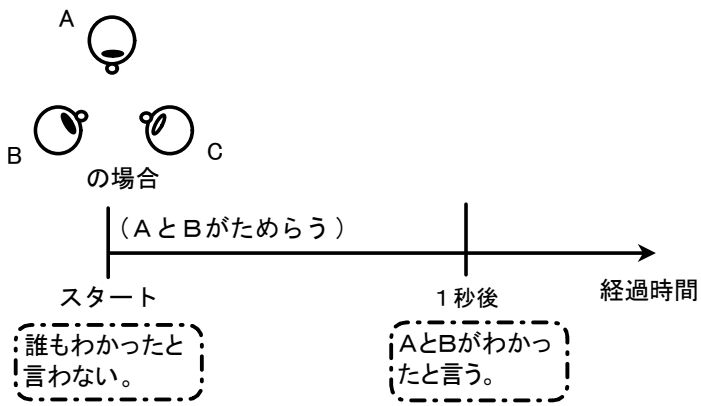
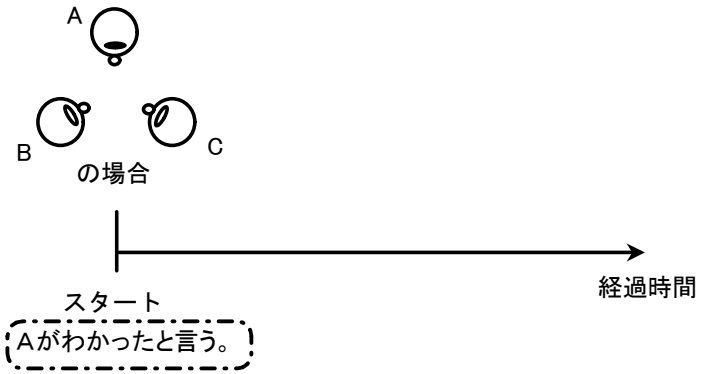
大貴がそう言うと、マチ子先生がうなずきながら言った。

「それでは、どうしたらいいかな？一瞬のあいまいさをなくすには」

マチ子先生が珍しく腕組みして考える。そして言った。

「明らかな場合は1秒後に手を挙げる。これはいいわね？明らかではない場合、つまり一瞬では判断できない場合は、その1秒後には

真喜さんが発案した「デジタル式判断法」



1秒後に誰もわかったと言わなくて、そのことから判断できたら
2秒後に「わかった」と言う。
「わかった」と言うのは、0秒後、1秒後、2秒後、...

手を挙げないことにする。1秒後に手を挙げる者がいなくて、そこで明らかになったことにして、その次の1秒後に挙げる。これでどうかしら。とにかく、1秒後ごとに手をあげるようにするの。そうすれば一瞬のあいまいさがなくなると思うけど、どう？」

大貴が立ち上がって言った。

「なるほど、それなら一瞬というあいまいさがなくなる。マチ子先生、それがいいです。それでやってみましょう」大貴は続けて言った「ということは、1人の場合で、『少なくとも1人は赤』と言われたときも、当たり前になるけどすぐに手を挙げるのではなく、1秒後に挙げるんですね？2人の場合で、赤と白が1人ずつだと、赤の人が一瞬でわかるから1秒後に手を挙げる。2人の場合で2人とも赤だと、どちらも一瞬ではわからないはずだから、2人とも1秒後には手を挙げないんだ。1秒後に手が挙がらないことから、自分は白でないと2人とも確信できるから、2秒後に手を挙げる、2人同時にね」

私にも分かってきた。そして言った。

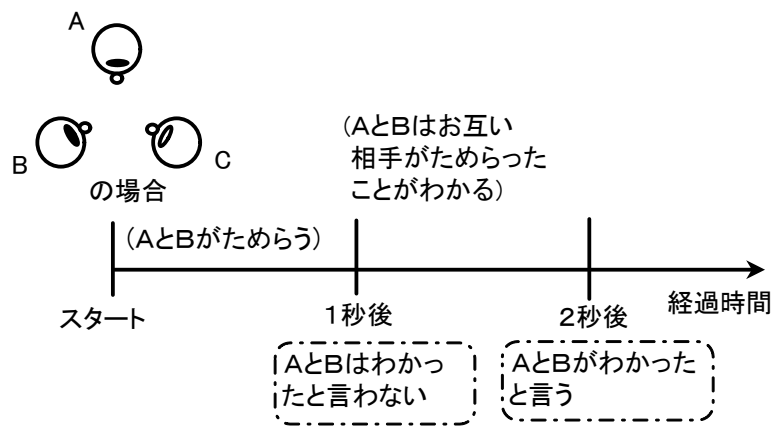
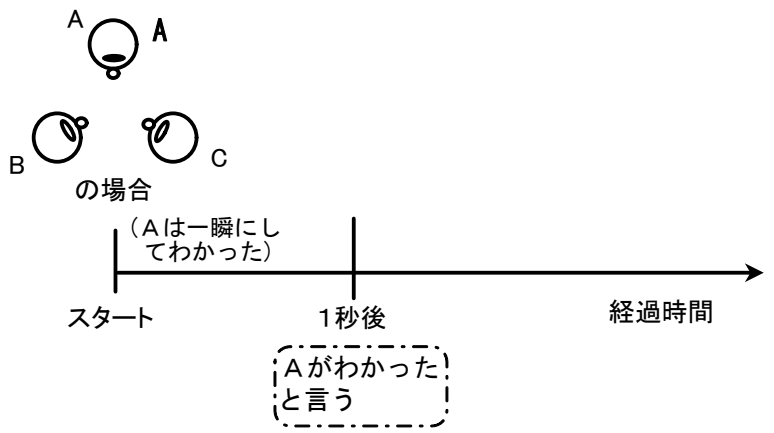
「3人なら3秒後になるわけね？順を追って考えればそうなりそうなのは分かります。これならわかりやすくもいいですね」

「そうね。今回は3人のお手柄ね。今までこの問題でこんな考え方をするの、見たことも聞いたこともないわ」

マチ子先生が手招きするように大貴に合図した。次の話に行くわよという表情だ。大貴がようやく腰を下ろしたところで、マチ子先生が言った。

「じゃあ続けで行くわよ。おでこにシールを貼る問題、10人だったらどう？」

「デジタル式判断法」の修正案



真喜さんの案より判断の時間が1秒ずつ遅くなるが、「一瞬」のあいまいさが解消される

私たちは「えっ？」と声を合わせてマチ子先生に注目する。

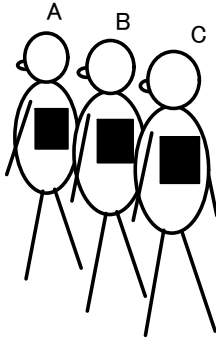
「10人のおでこに赤いシールを貼って、『あなたたちの少なくとも1人は赤です。自分が赤だとわかったら手を挙げて』という。私たちが考案した『デジタル式判断法』を使えば、10秒後に誰かが、いえ全員一齐に手を挙げるはずよ。どうやって説明したらいいか」

3人までなら何とか解決できた。次は4人ではなくて10人？そう思っていると、大貴も同じことを考えたようだ。

「4人ではなくていきなり10人ということは、何人でも同じように言えるということですか？」

「その前にちょっと話すわね。真喜さん、大貴君、この問題はとても有名でね、いろいろアレンジされて出題されるの。例えばその1つにこういうのがあるわ。3人がたて1列に並んでいて、3人とも背中に赤色のゼッケンが貼られている。どの人も自分より前にいる人の背中は見える。『少なくとも1人は赤』と言われて、自分が赤とわかったら手を挙げるという問題。おでこにシールの問題が分かれば同じように考えてすぐ解ける。この問題の面白いのは、赤と判断できるのは一番前の人だけということ。何も見えない人がわかるというのも面白いわね。こういったようにアレンジされたのはいくつか見たり聞いたりしたことがあるけど、4人でというのは聞いたことがないわ。3人が分かれば、同じように考えて4人でもわかるということもあるでしょうけど、やっぱり3人というのが問題としては美しいからかな？それでさっきの問題だけど、いきなり10人で出されたら、誰でもまず戸惑うでしょうね。10人いて、10人ともおでこに赤いシールを貼られて、『少なくとも1人は赤です、自分のおでこが赤とわかったら手を挙げて』と言われて、戸惑わない

3人がたて1列に並び背にゼッケンを貼る場合



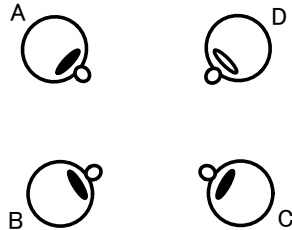
3人とも背に赤のゼッケンを貼り、「少なくとも1人は赤」と教える。
3人とも自分より前にいる人の背は見る事ができる。したがって Aは何も見えない。
「自分が赤とわかったら手をあげよ」という。

少しして Aが「わかった」という。Aはどうして自分が赤とわかったか。

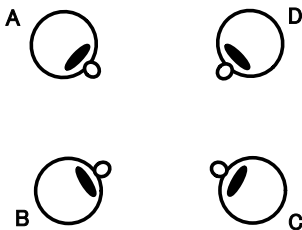
4人の場合

【1】3人が赤で、1人だけ白の場合

A、B、Cの3人は白のDを除外して考える。
これは、3人の場合で3人とも赤のときだから、しばらくの時間があれば、A、B、Cの3人とも自分が赤であることがわかる。



【2】4人とも赤の場合



Dの立場で考える。もしも自分(D)が白だとしたら(上の【1】のとき)、A、B、Cの3人は、しばらくの時間の後に、自分が赤であることがわかるはず。
もしもしばらくの時間が過ぎてもわからなければ、それは自分(D)が赤のせい。それでDは自分が赤であることがわかる。同じ理由で、A、B、Cもわかる。

人はいないでしょう」

この問題は、私はもちろん、大貴もさすがにどのように手を付けていいか考えつかなかった。ただ、3人が分かれば4人でもわかるだろう。これを繰り返していけば10人でもわかるということにたどりつけるのだろうかということはどういう感じか。

大貴が気が付いたようだ。以前に教わった「数学的帰納法」を使えるのではないかとつぶやいた。

「そう、『数学的帰納法』を使うといいわ。それで示すことができれば、何人いても大丈夫のはずだから。一緒にやってみましょう。まずどういう証明法だったか思い出して、確認しましょう」

数学的帰納法とは、ある自然数 n に関する事柄で、『① $n = 1$ の時に成り立つこと、② $n = k$ で成り立つなら $n = k + 1$ でも成り立つこと、この2つのことを示すことによって、すべての自然数で成り立つことを証明する方法』である。これをまず確認した。

「 $n = 1$ のとき。1人のおでこに赤いシールを貼って、『少なくとも1人が赤』。これはさっきも確認したわね。一瞬でわかるけど、1秒後に手を挙げる。つまり成り立つ。次に、 $n = k$ で成り立つとする。つまり k 人いて、 k 人ともおでこに赤いシール貼られていて、『少なくとも1人は赤』という条件で、 k 秒後に誰かが、実は全員が一斉に手を挙げるとする。これが成り立つときに、 $n = k + 1$ のときも成り立つことが言えればいいわけね？」

マチ子先生は、この先は考えてごらんなさいと言うように口をむすんだ。

大貴が立ち上がってトボ僧になる。私も今回は何か思いつけるかもしれないと、真剣に考えこむ。

もっと大勢(n人)の場合

1人のとき・・・わかる

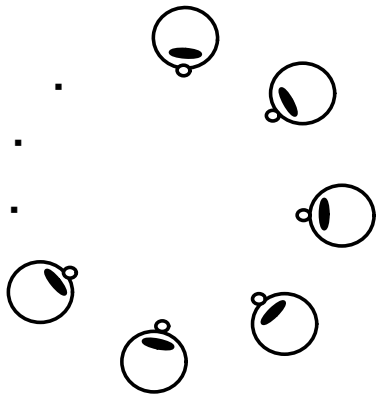
2人のとき・・・1人のときの考え方を使えばわかる

3人のとき・・・2人のときの考え方を使えばわかる

4人のとき・・・3人のときの考え方を使えばわかる

⋮

何人でも分かるのではないか？



k人のときわかったとして、k+1人でもわかることを示す
⇒
n人でもわかる
<数学的帰納法>

大貴がマチ子先生の隣に座った。どうやら先を越されたようだ。

「 $k+1$ 人のとき、自分が白だったとします」

「大貴君、それ何法？」

「背理法です」

『なるほど、背理法を使うのか』。自分は赤だと言いたいところを、あえて否定してみる。白だったとする。数学的帰納法の中で背理法を使う！すごい高級な話を展開しているようで胸が躍る。

「本来全員赤のはずですから、当然自分以外の k 人はみんな赤です。すると、その k 人の人たちは白の自分を除外して k 人で考えます。 k 人いて k 人とも赤のときは k 秒後に一斉に手を挙げるはずですから、そこで手が挙がらないのは、自分が白でないからです。だから $k+1$ 秒後に手を挙げられます。全員が同じように考えれば、 $k+1$ 秒後に全員が一斉に手を挙げます」

マチ子先生がニコニコしながらうなずいている。私にも理解できた。数学は面白いと思った。マチ子先生のおかげだ。

「さて、次の問題。でも、ちょっと待っててね」

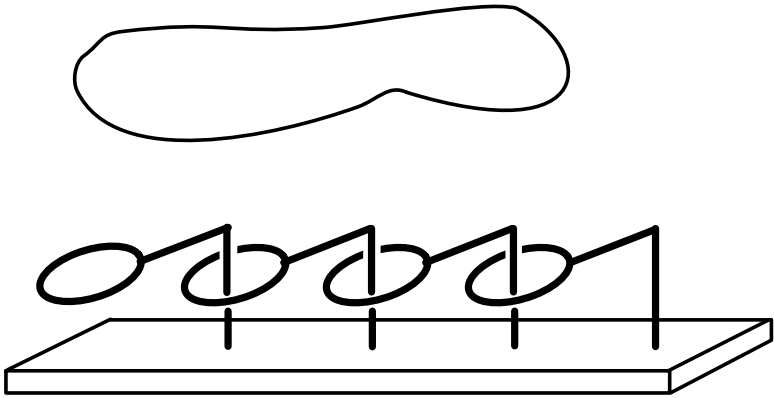
マチ子先生がそう言って立ち上がった。マチ子先生は部屋から出ていき、やがて両手に何かを持って戻ってきた。

「よかったわ。2つあった」

マチ子先生がテーブルに置いたのは、板に太い針金らしきものを迷路のように張り巡らせたものだ。

「これはね、昔からあるパズルなんだけど、息子が本か何かのっていたのを見て、自分で作ったの。私も一緒にやれるように2つ作ったのね」

そう言ってマチ子先生は私たちに1つずつ持たせてくれた。



9) リング付き柱にひもをかける * * * * *

マチ子先生が2人に持たせてくれたパズルは、カマボコ板のようなものに、先がリング状になった4個の太い針金を、奇妙に絡ませるようにして固定したものだ。よく見ると、最初の柱が二番目の柱の先のリングを通過しており、二番目が三番目のリングを、三番目が四番目のリングを通過している。

それとは別に輪になったひもがあって、これを最初の柱に掛かった状態から、次々と移動させていくというパズルだ。四番目の柱は、すぐ前の柱に、そしてさらにその前の柱に邪魔されている形で、輪を4番目の柱に移すのはかなり複雑な工程をたどりそうだ。

最初の柱をクリアして二番目の柱へ移動させるのは、あまり考えもせずにあれやこれややっているうちにできた。大貴はどう考えたかわからないが、やはりできたようだ。

マチ子先生の話では、二番目の柱へ行けたら、いきなり次へ進もうとしないで元に戻すようにするとよい、ということだった。元に戻すのもそれほど時間がかからずにできた。私が何度かくりかえしている間、大貴はじっと目の高さに掲げて見つめている。

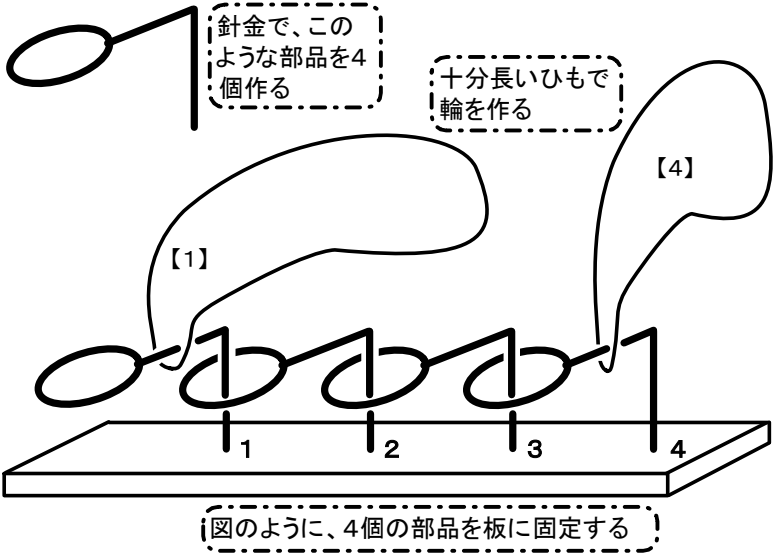
二番目にいったり戻ったりするのがほぼ問題なくできるようになったので、私は三番目の棒に進むことを考えた。大貴がぼそぼそ言いながら立ち上がった。パズルは手にしたままだ。どうやら輪は三番目の柱に進んだようだ。

「なかなか面白い。四番目の柱へ行くには、三番目の柱へ行ったり来たりする必要があるから、倍の手数がかかりそうだ」

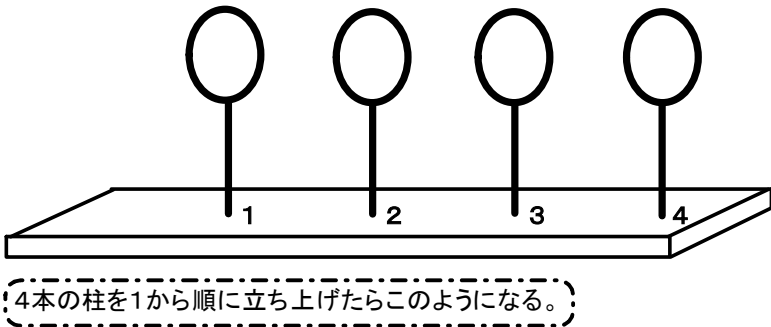
「えっ、もう最後まで行きそうなの？」

私が聞いても、大貴は例によって無反応だ。テーブルの周りをト

リング付きの柱で輪を移動させるパズル



【1】の状態(柱1に引っかかっている)から、【2】(柱2)、【3】(柱3)を経て、【4】の状態(柱4に引っかかっている)を目指す。それができたら、逆に【4】の状態から【1】の状態へ戻すことを目指す。



ポトポト歩いている。そして時折り板を目の高さに掲げる。ただ見るのではなく、輪の掛かり具合を観察するように、輪が垂れた状態にして見ている。私も真似して目の前に掲げたが、何も見えてこない。二番目から三番目に移そうとした輪がはずれてきてしまう、つまり最初の状態に戻ってしまうということがしばしばあった。

「ウン。どう動かせばいいかわかるんだけど、実際にやろうとすると、こんがらがってしまう・・・」

大貴がうなっている。『大貴でもこんがらがることがあるんだ』

三番目から四番目に行くのが難しいらしい。私はまだ三番目に行けていない。

大貴が、私たちの勉強部屋へ行って紙と鉛筆をもって戻ってきた。珍しく腰を据えて紙と鉛筆を使って考えるようだ。

私は自身あれやこれややりつつ大貴の様子を見守った。そのうち「わかった！」の聲が上がるだろうと期待しながら。しかし今回はなかなか大貴が声を発しない。紙と鉛筆を使ってもなかなか難しいようだ。平面上ではない動きだから、紙に描くのは簡単ではないのだろう。

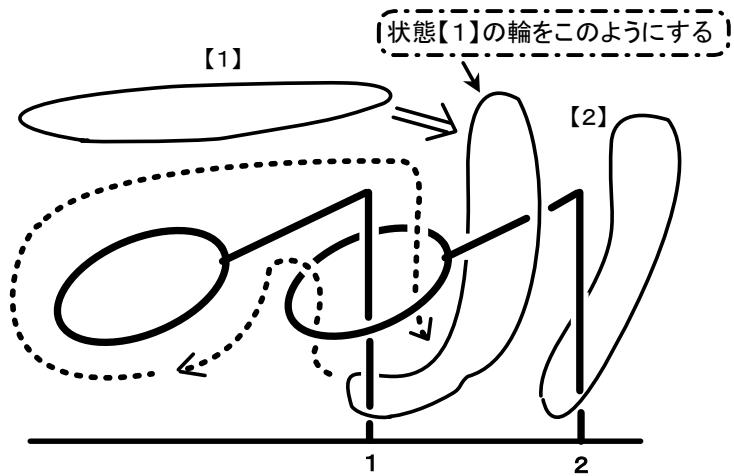
大貴は四番目の柱に移動するのも、そこから元へ戻すのもできたようだが、「わかった！」の聲は聞かれないはまだ。どうやら自分自身で納得できるような解明までには至っていないのだろう。結局今回は、大貴がすっきりしない状態のままマチ子先生に会いに行くことになった。

* * * * *

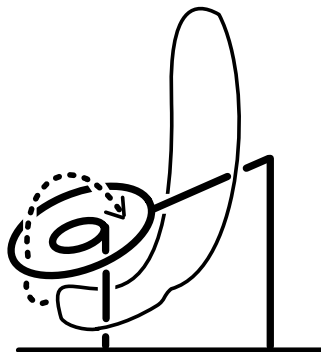
「でも、最後の柱まで行ったり来たりできるようになったのね？」

マチ子先生にそう聞かれて、大貴は少し不満そうな顔で答えた。

【1】から【2】へ



【【1】から【2】へ移動させるには、まず状態【1】の輪を⇒のようにしてから、柱2のリングの下から通して柱1を越えてくればよい



【このように考えると分かりやすい】

「はい、途中で間違えてこんがらかったりするんです。先へ進むはずが戻ってしまったり」

「なるほど、わかるわ。私もそうだったから。息子もそうだったわ。できるようになったつもりでも、ふと間違えてしまったり、わからなくなったりする。しっかり解明できていないということね」

マチ子先生は「ちょっと待ってね」と言って部屋から出ていき、何かを手にして戻ってきた。

「これも息子が作ったの」

マチ子先生が掌にのせて見せたのは、小さな板に今回のパズルと同じ針金の柱が二本だけ立っているものだ。ただし一本目の柱の頭は小さなリングになっている。確かにパズルの一本目の頭のリングは、他の三本と同じように作られているが意味がない。

「これは息子が自分のためというより、誰かに説明するために作ったのね。よく思いついたと感心したわ」

一本目の柱はしっかり固定されていなくて、二本目の柱のリングの間を上下させられるようになっている。しかも針金で作られているので、リングに通したに後折り曲げることができる。

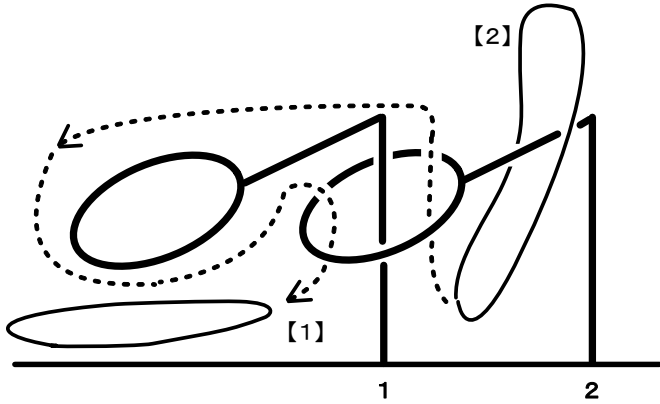
「2人にとって、二本目の柱に行ったり戻ったりするのはもう問題にならないはずだから、あまり意味のない器具に思われるでしょうけど、じっくり眺めていると、ちょっと気が付きにくいことが見えてくるのよ」

マチ子先生の話聞いて、大貴はその器具を手に取り、一本目の柱を上げたり下げたり、また前に折り曲げたりした。

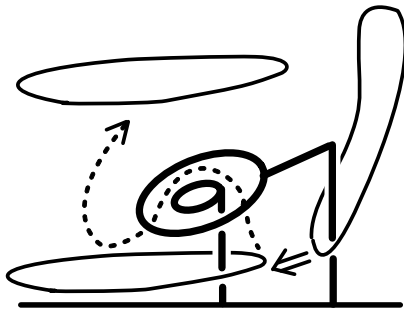
「どういうことですか？」

「2人ともいい？」

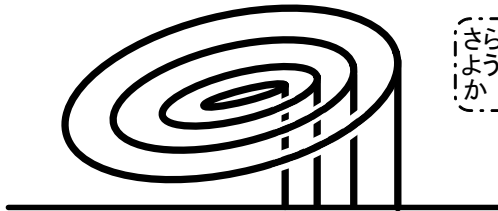
【2】から【1】へ



【2】から【1】へ移動させるには、柱2のリングの下から通して、柱1を越えてくればよい



このように考えるとわかりやすい



さらに、全体をこのように考えたらどうか

マチ子先生は大貴から器具を受け取り、話し始めた。

「これを単に一本目と二本目の柱と考えないで見るの。三本目と四本目というように。三本目にある輪を四本目に移すつもりで、この一本目を三本目というより、三本目以前の全体と考えるの。三本目までを乗り越えれば四本目に移せるわけだから」

マチ子先生はそう言って、一本目にある輪を二本目のリングの下から通して一本目の柱の上をまたぎ、二本目に移動させた。

「いい？一本目の下から上にまたいでくるわね。二本目から一本目に戻す場合は上から下へまたいでくる。三本目と四本目の場合も同じはずよ。三本目以前にまたそれぞれの移動の仕方がからんでくるけど、要は下から上、上から下というのを意識してやること」

大貴が素早く反応した。

「そうか。言われてみると単純なことだけど、それをちゃんと意識していないから、こんがらかってしまうんですね」

そう言うと、四本の柱の板を手にして動かし始めた。

「確かに、二本目から三本目に行くときもちゃんと意識してやれば間違いなくやれますね」

そうして、すんなり四本目まで移動させた。

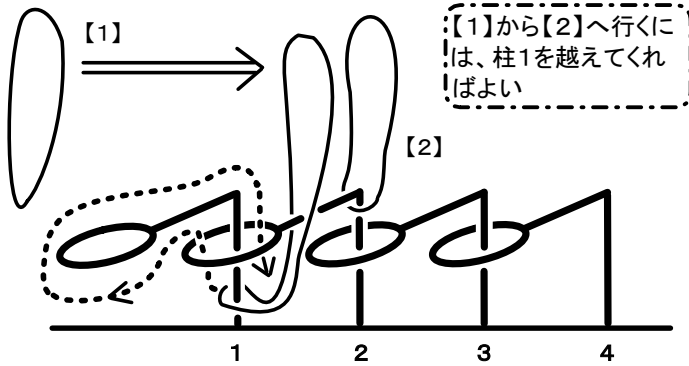
「分かりました！もう、こんがらからずにできます」

私が「戻す方も大丈夫？」と聞くと、「たぶんね」といいながら、やはりすんなり輪をはずしてしまった。私も同じようにできるかは自信がないが、マチ子先生の話したことは理解できたし、意識しながらじっくりやればできるだろうと思った。

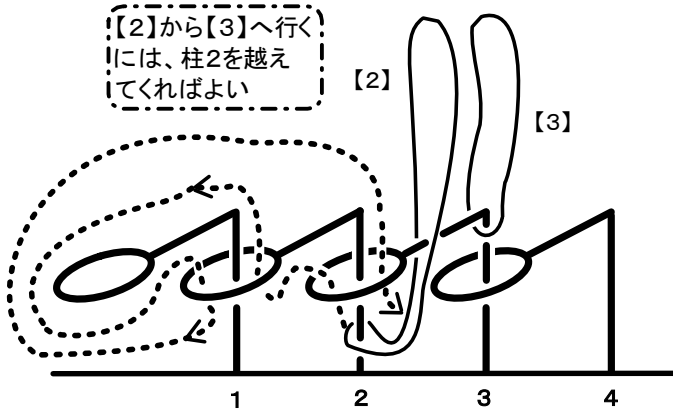
「こういう作りの知恵の輪がよくあるわ。作りは単純だけど、はずすのをじゃまするようにじゃまするように組み上げてある。実際に

【1】→【2】、【2】→【3】の移動。反対にたどれば、逆の移動になる

【1】→【2】



【2】→【3】



はできないことだけど、のぼしたり折り曲げたりを頭の中で描いていると、動かし方が見えてくる。今度そういうのがあったら試してみるといいわ」

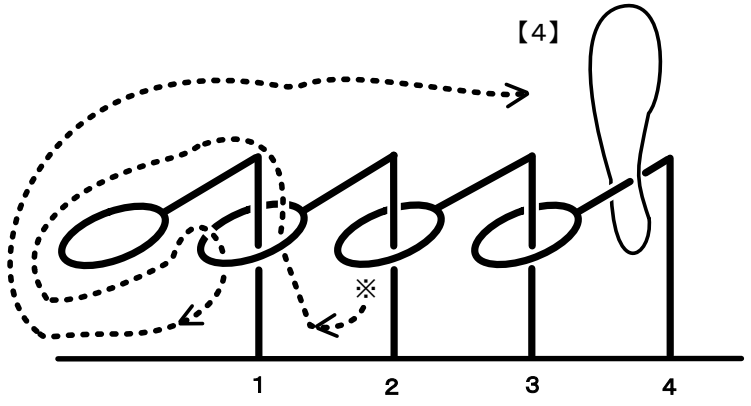
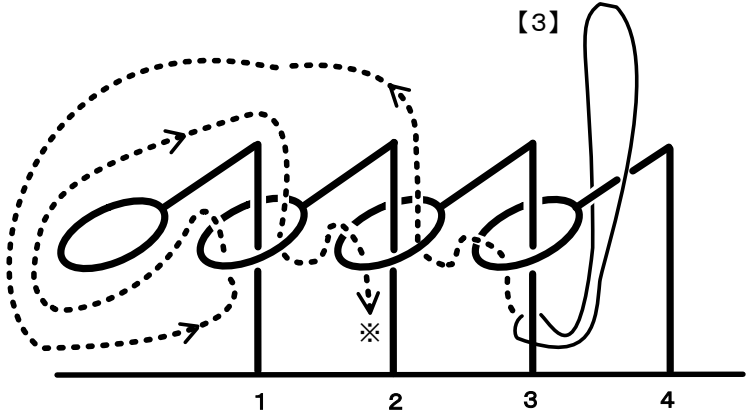
大貴はマチ子先生の話に耳を傾けているようだが、気持ちはすでに、息子さんの本棚を見させてもらうこと、そしてマチ子先生から次の問題を出してもらうことに動いているようだ。

マチ子先生が出した次の問題はこういうものだった。

「今度の問題はね、問題そのものはたいしたことないけど、どのように考えたらいいかということに関しては興味を持てるんじゃないかな？」そう言って続けた。「10円玉を二枚用意してね。1円玉でも5円玉でもかまわないわ。とにかく同じ大きさの円板を二枚。その一方を指でしっかり固定して、もう一枚の方をその周りをすべらせないように一回転させる。このとき回転した方は自身で何回転しているか？という問題。これはやっぱり昔からよく見たり聞いたりする問題で、実際にやってみなくても頭の中でその様子を思い描けばわかるはずよ。2人に考えて欲しいのは、『自分自身が回転しながらあるものの周りを回転するという動きをどうとらえるか』ということ。そのヒントにつながると思うけど、固定する円板の直径を回転させる円板の直径の二倍にしたらどうなるか、逆に半分にしたらどうなるかな？大きさや形をいろいろ変えてみると面白いと思うわ」

【3】→【4】の移動。反対にたどれば、逆の移動になる

【3】→【4】



10) 回転しながら回転移動する * * * * *

「普通に考えたら1回転よね？でも、問題として出されるんだから単純ではなさそうね」

私は大貴に語り掛けるでもなく——どうせ耳を貸さないだろうし——ひとり言のようにつぶやいた。

「うん、10円玉が真下に来た時にはすでに1回転しているよ」

めずらしく大貴が答えた。同じことを考えていたのだろう。

「と言うことは、2回転？」

今度は何も返ってこない。もう私のことはそっちのけで、次の段階へ進んでいるらしい。私の頭では歩きながら考えるのは無理だ。家に帰って実際に10円玉でやってみるしかない。

コロが私たちを派手な喜びのアクションで出迎えた。散歩と違ってマチ子先生の家には連れていけない。コロが鎖をいっぱい伸ばしてくるくる回りながら飛び跳ねる。

「コロが回転しながら回転移動している」

大貴が愉快そうに笑った。

「直径が2倍になると3回転するんだ」

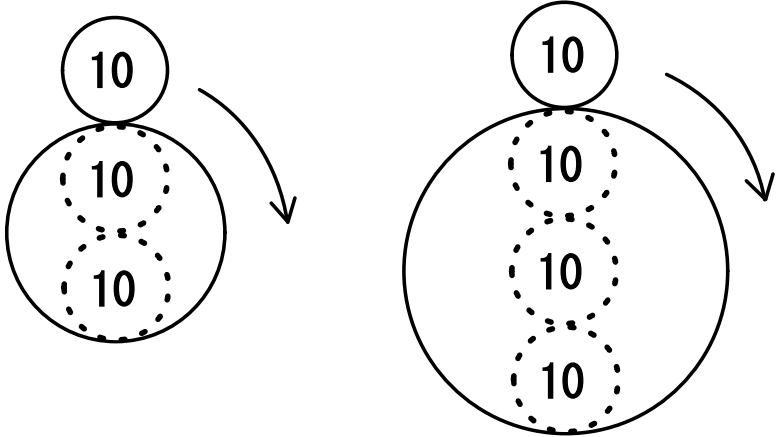
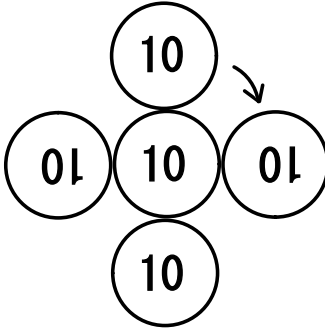
紙と鉛筆で考えていた大貴がぼそつと言った。私はまだ2枚の10円玉で2回転することを確かめている最中だ。

「えっ！3回転？直径が2倍なら4回転するんじゃないの？」

「3倍にすると4回転だよ。図を描いてみるとわかる。でもこれは頭の中だけでは考えにくいよね」

私は10円玉をたてに2枚並べて、直径が2倍の円をフリーハンドで描いた。そしてその周に沿って10玉を回転させながら移動させる。固定した円板が実物でないから、ちゃんと動かしているか疑

円板が回転しながら移動(自身は何回転するか)



{それぞれ自身は何回転するか?}

問だが、円周の長さを意識しながらやればわかる。回転移動する10円玉が右の真横に来た時、10円玉は円周の半分だけ回転したことになる。『10円玉は最初12時の方向だった頭が左を向いている！4分の3回転だ。真下へ来ると・・・、頭は下を向いている。1回転半だ』

「本当だ。真下へ来るまでに1回転半だから、もう半周したら、3回転だ」

私は思わず驚嘆の声を発してしまった。そしてさらに口をついて出る。「なんで2とか4にならないんだろう？3回転ということは、 120° のところで1回転なの？」

私は頭の中が混乱し、『直径が3倍、4倍になったら、逆に半分になったら？』と、疑問だらけになる。大貴はもうわかっているようだけど。

大貴が立ち上がりトボ僧になった。何をどう考えようとしているのか。私は紙に描いて考えることにした。周の長さを頭に入れながら、回転する10円玉の最初の頭の位置がどこへ行くかを確かめるのだ。

中心となる円板の直径をいろいろ変えて何回も繰り返すうちに、少しずつ見えてきた。直径が2倍になったら回転数も2倍になるのではという最初の予想はくつがえされたが、確かにその予想のままだとしたら、直径が3倍になったら6回転と考えることになる。そんなにくるくる回転するとしたら、それこそ不自然だ。

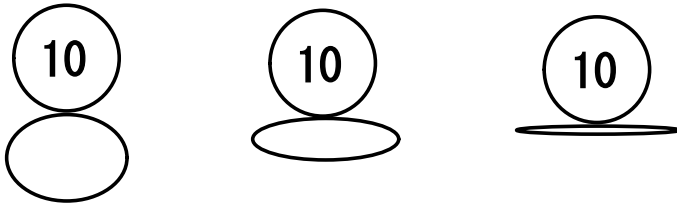
大貴が言うように、直径が3倍になったら4回転することがわかった。どうやら、直径が何倍かという数に1加えた数になるらしい。

今度は直径を半分にしてみる。10円玉は円周の半分で1回転が

円板が回転しながら移動(自身は何回転するか)(続き①)

{大貴君が思いついた考え方}

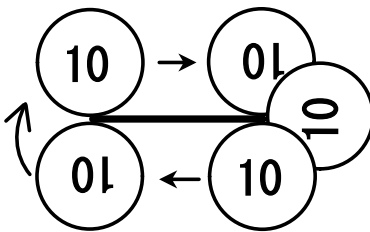
【1】中心の円がつぶれていった場合で考える



{移動する距離は変わらない。}

【2】円がさらにつぶれて線分になった場合で考える

{線分は円周の半分の長さ}



{上下は円周の長さに関する回転で、長さが等しいから両方で1回転する。}

{右、左は円板自身の回転で合わせて1回転する。}

{いずれの場合も回転数は変わらない。
{円周の長さに関する回転} + {円板自身の回転}
で、1+1 の2回転。}

終り、最後は頭が下を向くが、自身は1回転半回転する。

「わかった！」

大貴が椅子に座った。

「どういうことがわかったの？」

自分の方から相手の反応を見たいときは、しっかり私の方を見ている。説明を始めた。

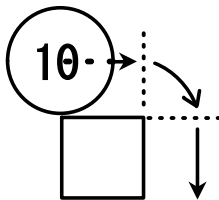
「中心の固定している方の円を少し上下につぶすよ。少しくらいつぶしても周りを一周してくる10円玉の回転数は変わらないよね。周の長さを変えてないから、最初に触れている10円玉の下の部分はそのまま同じ位置に戻るはずだからね。さらに中心の円をつぶしていくんだ。10円玉はカーブがゆったりしているところではゆっくり回転して、カーブが急なところでは素早く回転する。それでも1回りして元の位置へ戻ったときは同じ回転数のはずだよ。それでね、中心の円板をぺしゃんこにつぶして棒にしようんだ。10円玉は棒の上を半回転分転がって、棒の端ではそこを中心に 180° 回転する。そして棒の下を半回転分転がって、もう一方の棒の端を 180° 回転するんだ。棒の両端で合わせて 360° つまり1回転するんだよ。周の長さに関係なく、10円玉は自分で1回転するんだ。あとは周の長さ分の回転数をたせばいいんだ」

私は、大貴が話す通りのことを図に描いてみた。周の長さに関する回転数プラス自身の1回転。そうなるらしいと思われた法則が大貴の説明で納得できた。

「すごいね、大貴。言われてみれば簡単に理解できることだけど、よく思いついたわね。単純な動きの問題だけど、面白いわ、この問題。マチ子先生も驚くわよ、きっと」

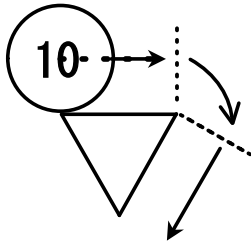
円板が回転しながら移動(自身は何回転するか)(続き②)

マチ子先生が思いついた考え方
(中心の円が四角形や三角形になった場合で考える)



中心の正方形の周の長さと、10円玉の周の長さと同じ。

4つの角で、それぞれ 90° 回転する。



上と同様、二つの図形の周の長さは同じ。

3つの角で、それぞれ 120° 回転する。

いずれの場合も回転数は変わらない。
(円周の長さに関する回転) + (円板自身の回転)
で、 $1+1$ の2回転する。

マチ子先生の反応が楽しみだ。大貴もそう思っているに違いない。

* * * * *

「大貴君、すごい発想力ね。驚きだわ」

大貴がニコニコ顔になった。マチ子先生との出会いが始まるまでは見せたことがない笑顔だ。私も本当にうれしい。

「私はね、こういう風に考えたの」

マチ子先生はそう言って、中心の円板を正方形にした図を描いた。大貴の考えたことを理解していたので、私にもマチ子先生の考えたことがすぐにわかった。4つの角で 90° ずつ回転するので、やはり10円玉自身は1周する間に1回転する。

「円の上の回転だと、移動しながらのしかもなめらかな回転なんで、かえって捉えにくかったのね。それにしても大貴君が思いついた考え方は素晴らしいは。私が考えたのより、ずっと数学的と言うか科学的よ」

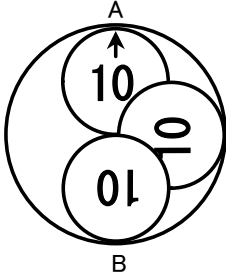
大貴の顔が嬉しさと照れくささが入り混じったものになった。

「ところでね、お2人さん。この問題、中心を10円玉の2倍の直径の円にして、内側を回転させたらどうなるかしら？10円玉自身は左回転になるわね。今までの右回転をプラスとして、左回転はマイナスで考えることにしましょう。もうきちんと理解できた2人には簡単かな？」

中心の円板の外側を回転するのと違って、今度では円板をつぶして考える訳にはいかない。10円玉が内側にあるからだ。でも、周の長さに関わる回転と自信の回転に分けて考えれば分かりそうだ。まず、周の長さに関わる回転は、左回りに2回転だから、マイナス2。自身の回転は中心の周りにプラス1回転。したがって、合

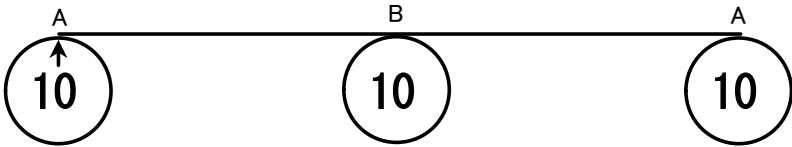
円の内側を回転する場合

直径が 2 倍の円の内側を回転する場合



この場合は外の円をつぶして考える訳にはいかない。中の円板が回転できなくなるから。

外側の円の円周は円板の円周の 2 倍。



円板は円周上を 2 回転する。右回転を + とすれば、左回転だから - 2 回転。

円板は円の中で右回りで 1 回転する。

したがって、両方合わせて考えると円板は - 1 回転する。

わせるとマイナス1回転。左回りに1回転だ。図を描いて調べたが確かにその通りだった。

大貴が説明したのも、私が考えた通りの内容だった。そして、大貴が面白いことを口にするときの顔付きをして言った。

「円周がプラス1回転で自身がマイナス1回転だったら、合わせて0回転だ」

私が『何のこと？』と不思議に思っていると、マチ子先生が笑った。

「そうね、直径が同じ円に10円玉が入り込んだら身動きできないわよね」そして、続けて言った。「今回のように動きが重なっている場合は、それぞれの動きに分解して考えとるいいわね」

私が「マイナスの回転があったり、0回転があったり複雑ですけど、一番分かりやすいのは点の周りを回転する1回転ですね。これなら私もすぐ分かります」と笑いながら言うと、マチ子先生が「あっ！」と言う顔をして話し出した。

「真喜さん、その通りだわ。今まで話題に上がらなかったけど、真喜さんのおかげで面白いことを思いついたわ」

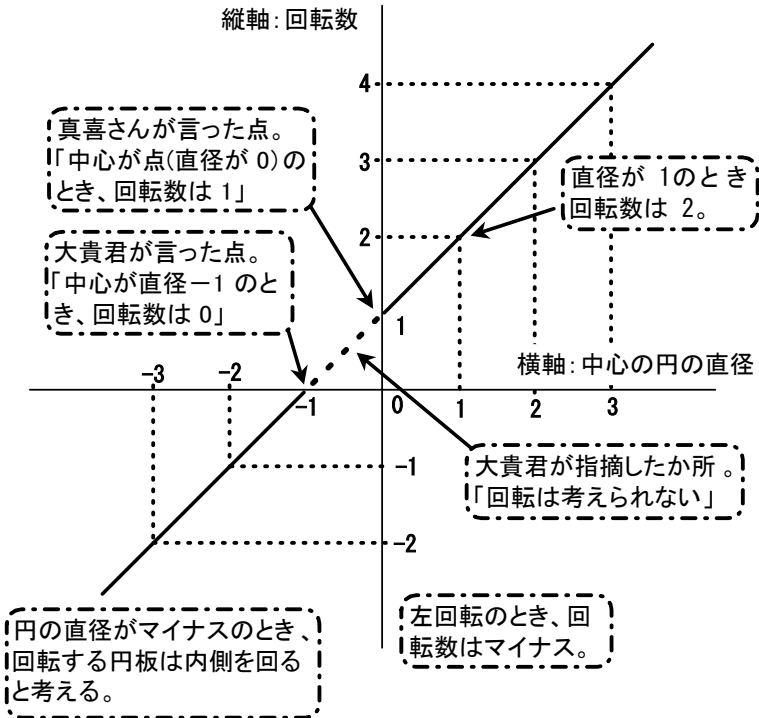
マチ子先生は紙に横の線とたての線を引き、更に右上がりの直線を描き込んだ。

「10円玉の直径を1とするわよ。横の線は中心の円の直径でたての線は回転数。直径に対する回転数はこの直線上の点になるわね。今真喜さんが言ったのは、横の線が0のときでたての線が1ね。さっき大貴君が言ったのは横がマイナス1のときで、たての線は0になるわ」

大貴がすぐに反応した。

中心の円の直径と回転数の関係

中心の円の直径と回転数の関係をグラフで表す。
(回転する円板の直径を 1 とした)



「これは面白い。直径が2や3のときもマイナスのときも、すべてこの直線で表せるんだ」

『大貴はまだグラフの勉強してないはずなのに・・・』

「でも、マチ子先生、ここの部分は消さなきゃダメですね」

大貴はそう言って、横の線のマイナス1と0の間を指さした。

「その通りだわ。ここは有りえないところだから消さないでダメね」

マチ子先生が大貴が指摘した部分を消しゴムで消し、大貴が愉快そうに見守っている。

10円玉の周りを10円玉が回転する問題がこんなところに行きつくとは。算数がよくわからない私にも、算数はなかなか面白いと思えた。

「じゃ、次の問題ね」

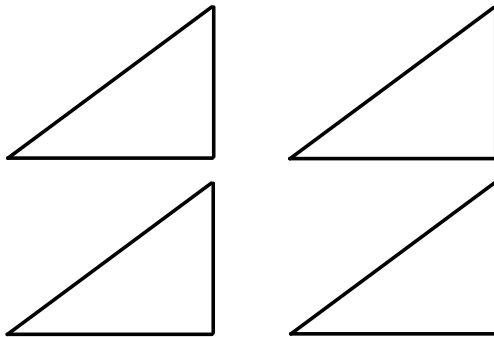
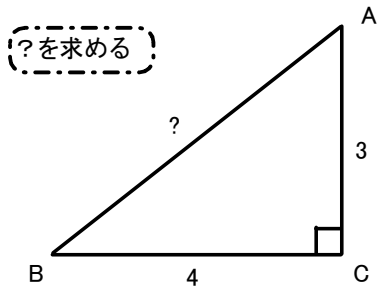
マチ子先生は、紙に直角三角形の図を描いて、直角をはさむ2つの辺のわきに3,4と書き、さらに直角の向かい側の辺のわきに「?」を書き込んで、その部分を指で押さえながら言った。

「この辺の長さを求めるのよ。これは『ピタゴラスの定理』、あるいは『三平方の定理』と言って、本当は中学で習う話。でも早くに知っておけば、図形の問題なんかでよく使われる大事な定理だから、とても役に立つわよ」

マチ子先生は、さらにこう付け足した。

「これと同じ直角三角形を4枚用意すると簡単にわかると思うわ。できたら、この問題は他にもいろいろ解き方があるから考えてみてね」

マチ子先生が描いた直角三角形



4個用意して考えるとわかりやすい

11) ピタゴラスの定理を証明する * * * * *

大貴は例によって頭の中で図を描いているようだけど、私は紙と鉛筆とそれから定規を用意した。ついでにハサミでマチ子先生に言われた通り、4枚の三角形を切り抜いて考えることにした。

最初のうちは4枚をぴったり貼り合わせることばかり考えていたが、それではどうもうまくいかない。3つの辺すべてが生かせる形にならないのだ。それで、「？」の辺4個で正方形になるように組合せたらどうかとやってみてうまくいった。大貴もほぼ同時に「できた」と言った。

形さえできれば、「？」の長さを計算するのはそれほど難しくはなかった。大貴はすでに別のやり方がないかを考えているようだ。そして、それほど時間がたたないうちに「できた！」と言った。大貴は4つの三角形で大きな枠ができるようにつなぎ合わせて、内側に1辺が「？」の正方形になるようにした。できた図を見れば私にも「なるほど」と理解できた。

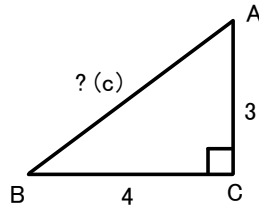
「？」は5であることがわかったが、大貴は、3つの辺が3、4、5という並んだ自然数で直角三角形になっていることに少なからず感動しているようだ。私のように、何でそんなことに心動かされるのかと考える人間と、そのあたりが頭の出来の違いなのかと、改めて思った。

めずらしく大貴の方から声を掛けてきた。「マチ子先生が出した問題は、2つの辺が3と4の場合だったけど、これは僕たちに考えやすくするためだったんだね」

私には大貴が何を言おうとしているのかわからない。

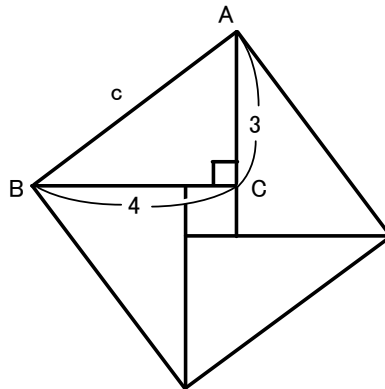
「2つの辺を a と b にして同じように考えれば、この「？」は a と

この図において？(cとする)
を求め



2人がまず思い付いた考え方

4枚の三角形を右のように
くっつける



外枠の大きな正方形の辺の長さを c とすると、
面積は $c \times c$
真ん中にできる小さな正方形は辺の長さが 1
これらのことから、次のような等式ができる。
 $c \times c = \{ (4 \times 3) \div 2 \} \times 4 + 1 \times 1$
 $= 25$
 $c \times c = 25$
になるような c は 5
よって、問題の答え？は 5

bで表せるんじゃないかな」

大貴はそう言って、先ほどの図の4をaに、3をbに書き換え、さらに「?」のところをcとした。そして垂直と水平の2本の線を描きこんだ。正方形全体が田の字で4つの部分に分けられた状態になった。

「さっきはこの正方形を4つの直角三角形と辺がcの正方形の面積の和で表したけど、これをaとbで表せばいいはずだよ」

大貴に言われるままに、私は図を見ながら考えた。すると、さっき大貴が引いた2本の線の意味がすぐにわかった。田の字で分けられた4つの四角形はどれもaとbで簡単に表せる。aかけるaとbかけるbとaかけるbが2個だ。さっきは2つの辺が3と4とわかっていただけ、大きい正方形の辺を3たす4の7としたわけだけど、3と4のままやれば、直ちに一般化に結び付くわけだ。

* * * * *

大貴がマチ子先生に話すと、

「やっぱり一般化したわね。大貴君のことだからそこまでやってくると思っていたわ」

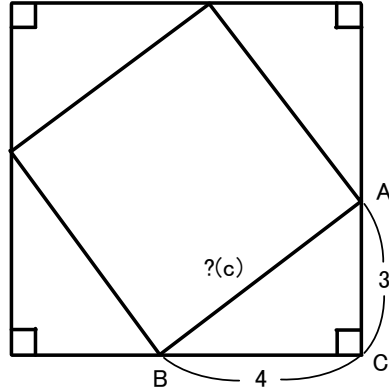
マチ子先生はそう言ってうれしそうに笑った。自分のもくろみ通りいったからだろう。

「大貴君が考えた田の字で分割するやり方、素晴らしいわ。でも、この分割の仕方を最初に2人で思いついた方でやろうとすると、ちょっとわかりにくくなるわ。2つの辺の長さの和でなくて差が関係してくるから。練習問題としてやってみるのもいいかもしれないわね。ところで、中学へ行くと数学で文字式の計算を習うんだけど、その計算法を使えば、田の字に分割して考えなくても、計算式で示

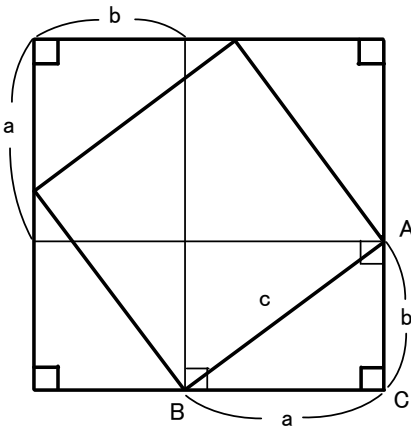
大貴君が思い付いたもう一つの考え

4枚の三角形を右の図のように配置する

外側は辺が7の正方形で、内側は辺が? (c) の正方形。
よって、
 $\{(3 \times 4) \div 2\} \times 4 + c \times c = 7 \times 7$
 $24 + c \times c = 49$
 $c \times c = 25$
したがって、 $c = 5$



大貴君が一般化した『ピタゴラスの定理』



BC=a、CA=b、AB=cとして、
図のように2本の線を引く。
大きな正方形の面積を2通りの方法で表す。
1)
(4個の直角三角形)+(辺がcの正方形)
 $\{(a \times b) \div 2\} \times 4 + c \times c \dots ①$
2)
(辺がaの正方形)+(辺がbの正方形)+(2辺がa、bの長方形) $\times 2$
 $a \times a + b \times b + (a \times b) \times 2 \dots ②$
①=②より、
 $a \times a + b \times b = c \times c$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{ピタゴラスの定理})$$

すことができるのよ、1つ目も2つ目も」

大貴がうなずくように首をふっている。

「ところでね、このピタゴラスの定理は証明の仕方が100通り以上もあると言われてるわ」

「うへー！」

大貴がすっとんきょうな声を発した。私も驚きだ。

「あなたたちが証明したのもその1つ、いや2つね。その中で私が一番気に入っているのはこういうやり方」

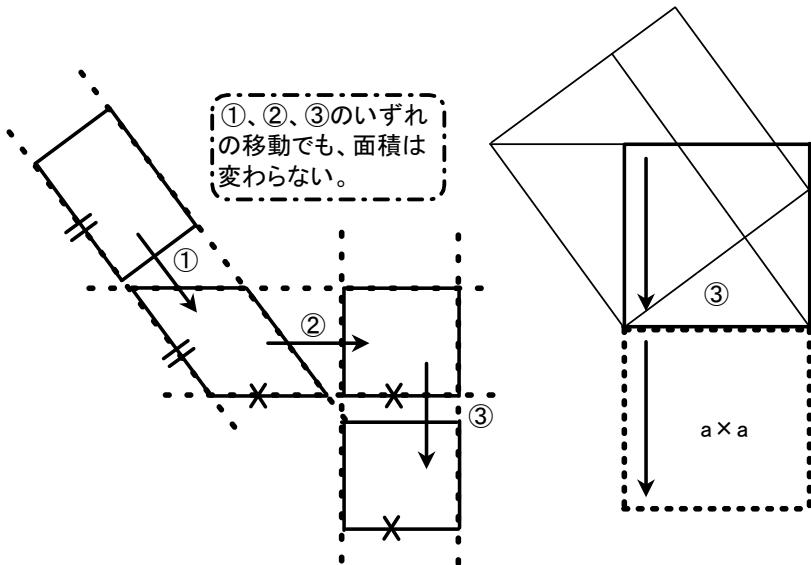
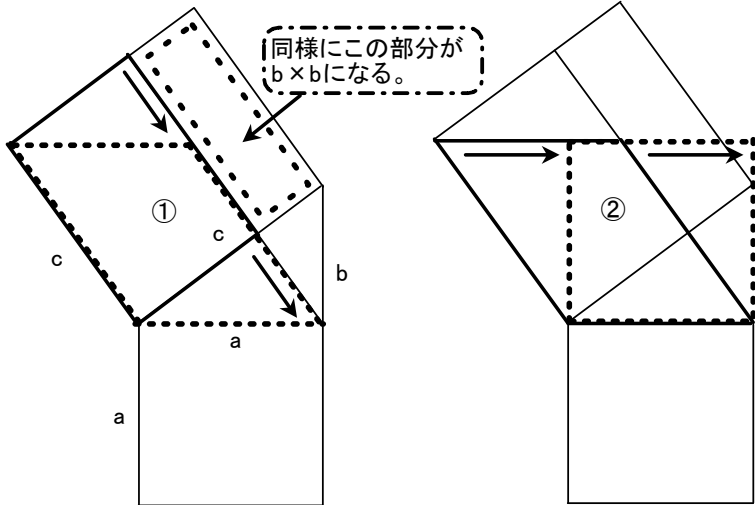
マチ子先生はそう言うと、紙に図を描いていった。

「ピタゴラスの定理のaの2乗やbの2乗は、辺の長さの2乗、つまり各辺を1辺とする正方形の面積よね。定理は『一番長い辺で作る正方形の面積が他の2つの辺で作るそれぞれの正方形の面積の和になる』と言っている。とても美しい定理ね」

マチ子先生が描いたのは、直角三角形の各辺にその長さを辺とする正方形を描き加えたものだ。そして直角の角の頂点から、向かい側の辺に垂直な直線を描きこんだ。そうしてできた2つの長方形の1つを平行線の間でつぶしていく。面積は変わらないことは何の説明がなくても直感的にわかる。今度は別の方向へやはり平行線の間で移動する。正方形ができた。最後はそれを真下にそのまま移動する。下の正方形にすっぽり収まった。辺の長さなど確認が必要かもしれないが、左上の長方形が形を変えながら下の正方形にぴったり収まった。面積は変わらないままだ。『これは感動ものだ』。

もう1つの長方形を同じようにやれば右側にある正方形に収まるであろうことは感覚的にわかる。『両方合わせればピタゴラスの定理だ』

マチ子先生が気に入っている証明



「マチ子先生、素晴らしいですね、この証明。僕も気に入りました」
「私もです」

私も思わず口にした。マチ子先生が私たちを交互に見ながらニコニコしている。そうして、改めて直角三角形とその周りにできた3つの正方形を描いて示した。面積の関係が一目でわかる図だ。

「最後にもう1つだけ紹介するわね。直角三角形1個だけの図で示せる方法よ」

マチ子先生はそう言って直角三角形を描き、直角の頂点から向かい側の辺に垂線を引いた。新たに小さい直角三角形が2個でき、元の三角形と合わせて3個になる。

「真喜さんはわかるわね。この3個の直角三角形はみんな相似の関係にあるわ。大貴君は相似ってわかるかな」

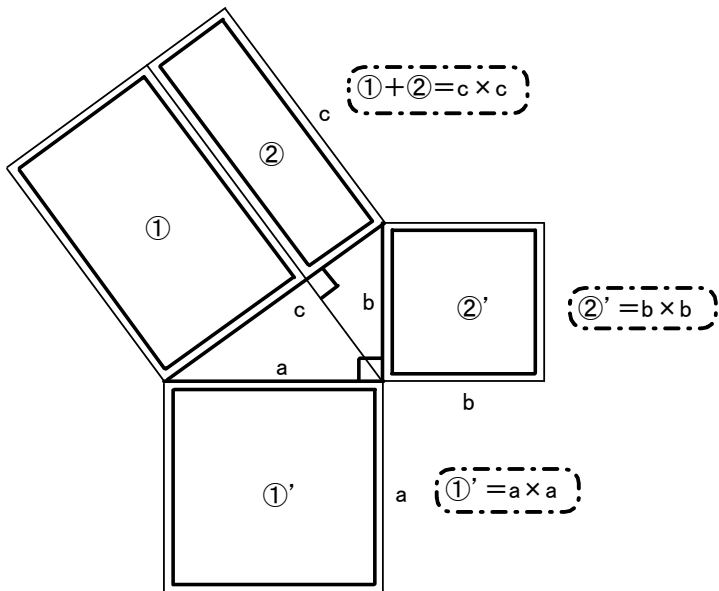
「はい、分かります。合同と相似は本で読んだから知っています」

「よかった。それじゃ話を進めるわよ。辺の長さの比で等式を作るわけだけど、相似な三角形が3個あるからいろいろできるわね。考えられる等式を次々あげて行って、その中から使いそうなものを選ぶという手もあるけど、ここは目指す『ピタゴラスの定理』の式の形を頭に入れながら作ることにしましょう。式は2個作ればいいはずよ」

マチ子先生は、直角の頂点Aから対辺に引いた垂線の足をDとし、ADの長さを C_1 、DBの長さを C_2 とした。そして、そこで手を止めた。あなたたちも考えてごらんなさいと口には出さないが言っているようだ。

大貴が立ち上がった。でも、トボトボ歩きは始めない。立ったまま図をじっと見つめている。私も考えた。aの2乗やbの2乗がで

今の証明をわかりやすく図で示す。



①' = ①
②' = ②
⇒ ①' + ②' = ① + ②
 $a \times a + b \times b = c \times c$
 $a^2 + b^2 = c^2$ (ピタゴラスの定理)

きるような比例式を目指せばいいはずだ。

やがて大貴が腰を下ろし、マチ子先生に「いいですか？」と言うように顔を向け、マチ子先生がうなずくと鉛筆を手にした。2つの比例式を書き、それらを普通の等式に書き換えた。そこで私にも見えた。

「あっ、『ピタゴラスの定理』ができる」

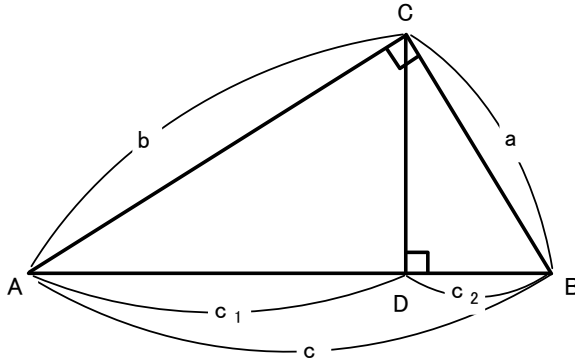
またまた私は叫んでしまった。マチ子先生が笑い、大貴も笑った。「最初の3、4、5の直角三角形は昔から知られていて、大工さんなんかも使っていたそうよ。子どもたちも知っておくといいわよね。野球やサッカーのコートを描きたいときなんか、この定理を使えばきちんとした直角が作れるから」

私たちが「なるほど」とうなずいていると、マチ子先生が再び話し始めた。

「ところで、この定理には数の2乗が出てくるわね。数を2乗したものが、たとえばさっき出てきた25とか36なんて数だったら、元の数は5、6と簡単にわかるけど、直角三角形で直角をはさむ2辺が2と3だったりしたら、2の2乗たす3の2乗の13が斜辺の長さの2乗になる。斜辺の長さは？と聞かれたらどうするか。2乗して13になる数なんてわからないわよね」

確かにそうだ。大貴もこんなことまでは考えていなかったようだ。「実は中学の数学で習うことなただけど、意味を理解するのはむずかしいことではないからちょっと話すわね。こういう数があることを知っておけば、ピタゴラスの定理を使う場面はもちろんだけど、数が関係するいろいろなところで、新たに理解できるようになる範囲が広がるから」

三角形の相似比を用いる証明



$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$

$$a : c = c_2 : a \Rightarrow c \times c_2 = a \times a \dots \textcircled{1}$$

$$b : c = c_1 : b \Rightarrow c \times c_1 = b \times b \dots \textcircled{2}$$

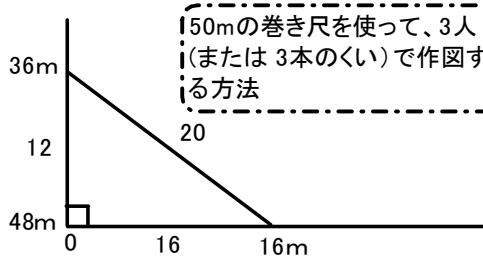
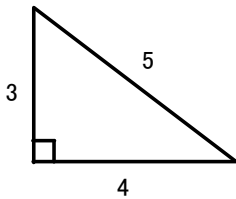
$$\textcircled{1} + \textcircled{2}$$

$$c \times (c_1 + c_2) = a \times a + b \times b$$

$$c \times c = a \times a + b \times b$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{ピタゴラスの定理})$$

巻き尺でグランドに直角を作図する



50mの巻き尺を使って、3人
(または3本のくい)で作図する
方法

そう言って、マチ子先生は紙に数字を書き並べ、『平方根』についての説明をしてくれた。

たとえば2の平方根の正の方は 1.41421356…というような数で、この先、無限に続く小数だという。このようなことは円周率 π でも聞いたことがある。

円を描くとその円周と直径の比が 3.14… という無限に続く値になるのと同じように、正方形を描くと対角線と辺の比が 1.41… という無限に続く値になる。図では簡単に描けるのに、その長さが無限に続く小数になるというのは、何か神秘的なことのように感じる。

四則演算なら紙と鉛筆で何とかなるが、平方根となるともう計算機に頼るしかない。私は計算機のすごさを改めて思い知った。

マチ子先生がチラッと時計を見上げながら言った。

「あら、ちょうど4時になるところね」

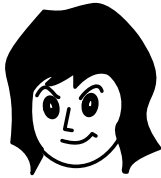
どうやら次の問題に関係しそうな言い方だった。

「私が小学生のとき、一番悩まされた問題なんだけどね」そう言ってマチ子先生は続けた。

「もう20分もすると、長針が短針に追いついて、ピタッと重なる瞬間があるわね。それが何分何秒か求めなさい、という問題。算数で考えると、とても悩むわ。真喜さんは方程式が使えるから簡単に解けるんじゃないかな。大貴君はぜひとも算数で解いてみて。この問題は今度話すけど、有名な「アキレスとカメ」の話に関係してくるのよ」

大貴と私が時計を見上げていると、マチ子先生が言った。

「いきなり時計で考えてわかるんならそれでもいいけど、ちょっと簡単な例で考えてみて」



自然数の平方根



$1 \times 1 = 1$	$3 \times 3 = 9$
$1.414\cdots \times 1.414\cdots = 2$...
$1.732\cdots \times 1.732\cdots = 3$	$4 \times 4 = 16$
$2 \times 2 = 4$...
$2.236\cdots \times 2.236\cdots = 5$	$5 \times 5 = 25$
$2.449\cdots \times 2.449\cdots = 6$...
$2.645\cdots \times 2.645\cdots = 7$	$6 \times 6 = 36$
$2.828\cdots \times 2.828\cdots = 8$...

上の＝の右側は自然数が並んでいます。左側は、それぞれの自然数に対して、同じ数同士の積がその自然数になるような数が掛け算の形で並んでいます。

右側の1、4、9、16、25に対しては、左側は自然数どうしの積になりますが、それ以外の2や3や5、・・・に対しては、「小数×小数」の形になっています。数のあとの・・・は、その先に数が限りなく続くという意味です。

電卓を用意して、左側の「小数×小数」を計算してみてください。右側の自然数に近い数値になるはずですよ。

電卓に $\sqrt{\quad}$ の記号のボタンがあったら、自然数を打ち込んだ後にそのボタンを押してみてください。たとえば、

$\boxed{2}$ $\sqrt{\quad}$ とすると、1.414... です。他の数でも確かめてみましょう。

＝の左側の数の1つひとつを、それぞれ右側の自然数の平方根と言い、 $\sqrt{\quad}$ の記号を用いて表します。自然数をNとすると、Nの平方根は \sqrt{N} です（注：本当は、 $\pm\sqrt{N}$ の2つある）。 $\sqrt{\quad}$ はルートと読みます）。

例) $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

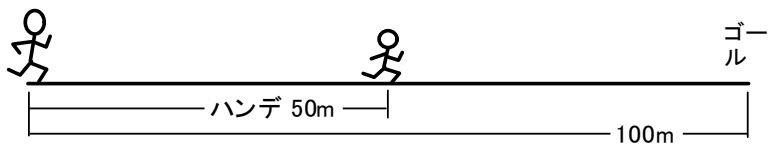
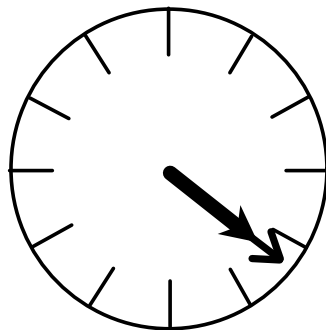
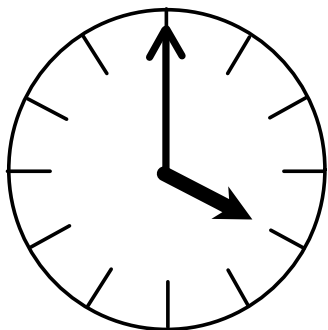
注：100の平方根は+10と-10（ $-10 \times (-10) = 100$ だから）

$a \times a = a^2 = 5$ のとき、 $a = \pm \sqrt{5}$

マチ子先生は、紙に1本横線を引き、左端を「スタート」、右端を「ゴール」として、ちょうど中間に子どもを、スタート地点に大人を描いた。

「大人の方が子どもの2倍の速さで2人が同時にスタートしたら、2人同時にゴールするのは直感的にわかるわよね。直感的にというのは、理屈を考えたり計算したりしなくても感でわかるということ。ハンデを変えたり2人の速さを変えたりして、どこで追いつくかとかいろいろやってみるといいわ。さっきも言ったように方程式を使うと簡単に解けてしまうけど、この問題の意味をいろいろ考えてみて」

4時と5時の間で長針と短針が重なるのは、4時何分何秒か。



大人の速さが子どもの速さの2倍なら、同時にフィニッシュするであろうことは直感的にわかる。

12) 時計の長針と短針が重なるのは * * * * *

大貴は紙に図を描きながら、大人と子どもの速さを変えて2人が並ぶ位置を考えたり、最初のハンデを変えていっしょにゴールするための2人の速さを考えたりしている。

私はマチ子先生が言った、『方程式』で解くことを試みることにした。2人の速さとスタート時のハンデを適当に決めて、それぞれ t 秒後の位置を表してみる。めずらしく大貴が私の手元をのぞいてきた。大貴は方程式という言い方に関心があり、聞きたがっているはずだが、なかなか「教えて」と言い出せずにいる。少しいじわるだが、いい機会だからお願いしてくるのを待つことにした。

「 t は何？時間？」

大貴が聞いてきた。私が「聞きたい？」と言うと、大貴は何やらもごもご口を動かしている。

「算数は答えを計算する式を作るでしょ？方程式はね、求める答えを x として、とにかく x が含まれる等式を作るの。そうしてから x を計算するの」

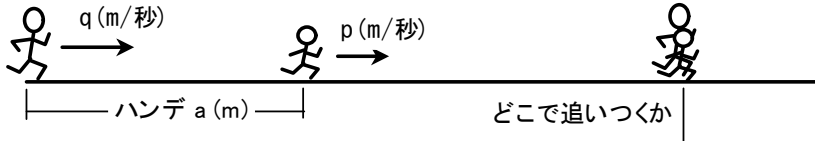
私は簡単な例で、文字が入った式の計算の仕方などを説明した。案の定大貴は私がわかっている程度のことはすぐに理解した。

「方程式ってすごいね」

大貴としては私への感謝の気持ちを込めたつもりだろう。『まあ、よそでなら「ありがとう」って言えるかな？』

大貴は大人と子どもの速さをいろいろ変えて、それぞれの t 秒後の位置を表す式を作り、ハンデの大きさとの関係を考えているようだ。はやくも先を越されそうな気配だ。

しばらくして大貴が立ち上がった。コロもすぐに反応して立ち上



2人のそれぞれの速さとハンデをいろいろ変えて、どこで追いつくかを考える。

大人のスタート地点を基準点にして、ハンデを a (m)、子どもの速さを p (m/秒)、大人の速さを q (m/秒) として、それぞれ t 秒後の位置を表すと、

$$\text{子ども} : a + pt \text{ (m)}$$

$$\text{大人} : qt \text{ (m)}$$

したがって、2人が同じ地点になるのは、

$$a + pt = qt$$

のときで、

$$a = (q - p)t$$

より、 t について解くと、

$$t = \frac{a}{q - p} \text{ (秒)}$$

つまり、追いつく時間 t は、ハンデの距離を 2人の速さの差でわった値であることがわかる。

がった。

「うーん、どうしてだ？ どうしてなんだ？」

大貴がうなるようにつぶやいている。

「なんで、こんな簡単な式で求まるんだ・・・？」

大貴が計算していた紙を見ると、確かに最後が簡単な式で終わっている。

「2人とも動いているのに、どうしてこんな簡単な式で求まるんだろう？」

紙を改めて上からたどってみると、確かにとても簡単そうに見える。ほんの数行で終わっている。『ということは、時計の問題も？』

「2人が走る問題は、時計の長針と短針の問題と同じだね」

大貴も同じことを思い付いていた。

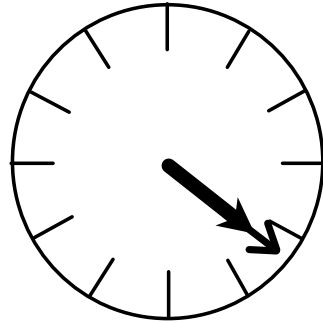
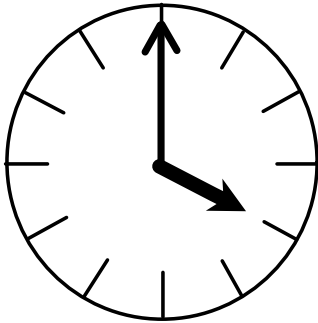
「マチ子先生が悩んだと言っていたけど、僕だって同じだ。4時のときの長針と短針のハンデを動く速さの差で割ればいいなんて、思いつきっこない」

そう言いながらも大貴は腰をおろし、紙で計算を始めた。私も負けまいと取り掛かった。

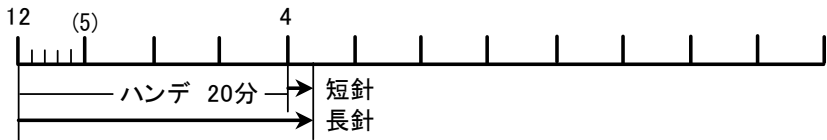
長針と短針の速さをどうするか。長針が1分間に1目盛り動くので、この速さを1とすると、短針の速さは12分の1だ。したがって、両者の速さの差は12分の11になる。ハンデの20をこの差で割ろうとすると、分数でわることになるので、それを避けるために割り算をする前に12を両辺にかけた。結果として出たのは、21.8181...分で、あとは小数の0.1818...分を60倍して秒に直せばよい。

21分49秒になった。長針と短針が重なる時間として確かに正し

4時と5時の間で長針と短針が重なるのは、4時何分何秒か。



数直線で表すと



短針のハンデは20分(20目盛り)
 長針の速さ: 1 (注: 1分間に1目盛り)
 短針の速さ: $1/12$ (注: 60分間に5目盛り)
 t 分後の長針の位置: $1 \times t = t$
 t 分後の短針の位置: $20 + (1/12) \times t = 20 + t/12$
 長針と短針の位置が一致するとき
 $t = 20 + t/12$
 両辺に 12をかけて、
 $12t = 240 + t$
 $11t = 240$
 $t \div 11 = 21.82$ (分)
 0.82 (分) $= 0.82 \times 60$ (秒)
 $= 49.2$ (秒)
 よって、およそ 4時21分49秒。

注: 左の式で、
 $20 = t - t/12$
 $20 = (1 - 1/12)t$
 これから、
 $t = \frac{20 \text{ (ハンデ)}}{1 - 1/12 \text{ (速さの差)}}$

そうだ。方程式で考えたように、ハンデを速さの差でわれればよいことがわかった。

大貴も同じように計算したようだが、相変わらずどうしてハンデを速さの差でであると求められるのかを考えているようだ。

けっきょく私たち2人には、どのように考えたらよいのかわからなかった。

* * * * *

「方程式で解きました。でも算数で解けるようないまい考え方がわかりませんでした」

大貴が隣でしょげたようにうつむいている。

「この問題はね、後で話すけどとても興味深い内容を含んでいるの。この間も話したように、この問題では私はずいぶん悩まされたわ。はたしてあの頃理解できたのかもよく覚えていない。それがね、ある時ひらめいたの、こう考えればいいのかって」

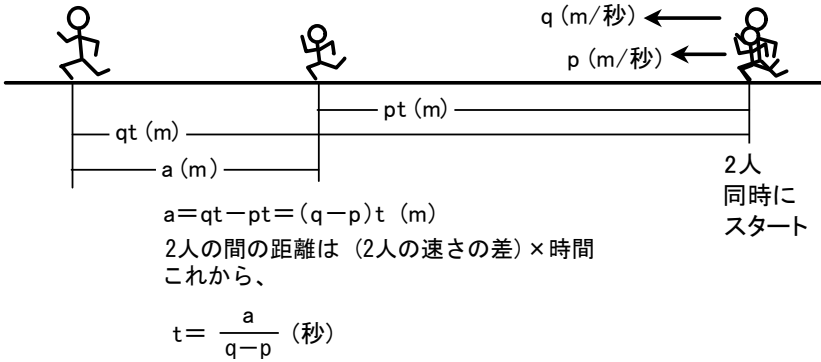
大貴はずっと下を向いたままだったが、マチ子先生の話に集中していたようで顔を上げた。

「ゴールに向かって走る2人の様子を写したフィルムを巻き戻してみたら・・・、今はフィルムなんて言わないか、ビデオを逆再生したらって考えたの。あなたたちは、あとから走るほうが早ければいずれは追いつくことは認めるわね？なんでこんなことを確認するかと言うと、さっき言った興味深い話に関係するからよ。それで、追いついた地点を出発点にして考えると、・・・」

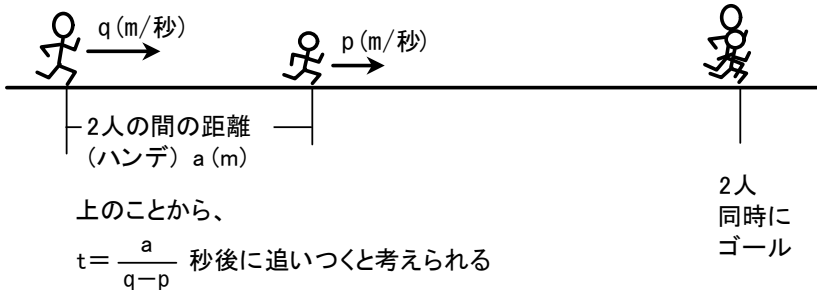
そこで大貴が反応した。何かがひらめいたようだ。それには気付かずマチ子先生が続けた。

「2人が一緒になった地点を出発点にして、それぞれ同じ速さで一

!2人が同時に同じ地点からスタートしたとき、差が a (m)になる時間 t (秒) !



!2人のハンデが a (m)のときに追いつくまでの時間 t (秒) !



齊に走るの」

突然大貴がすっとんきょうな声を発して立ち上がった。

「そうか！そうすると、2人の差は速さの差かける時間だ！」

「そうよ、大貴君。ビデオの逆再生で考えるとごく当たり前の話でしょ」

私にも話が見えてきた。逆再生のイメージでは2人が後ろ向きに走っている姿が浮かぶけど、前を向いて走っても同じだ。同時にスタートしたあと、時間がたつにつれて速さの差で2人の間がどんどんひらいていく。

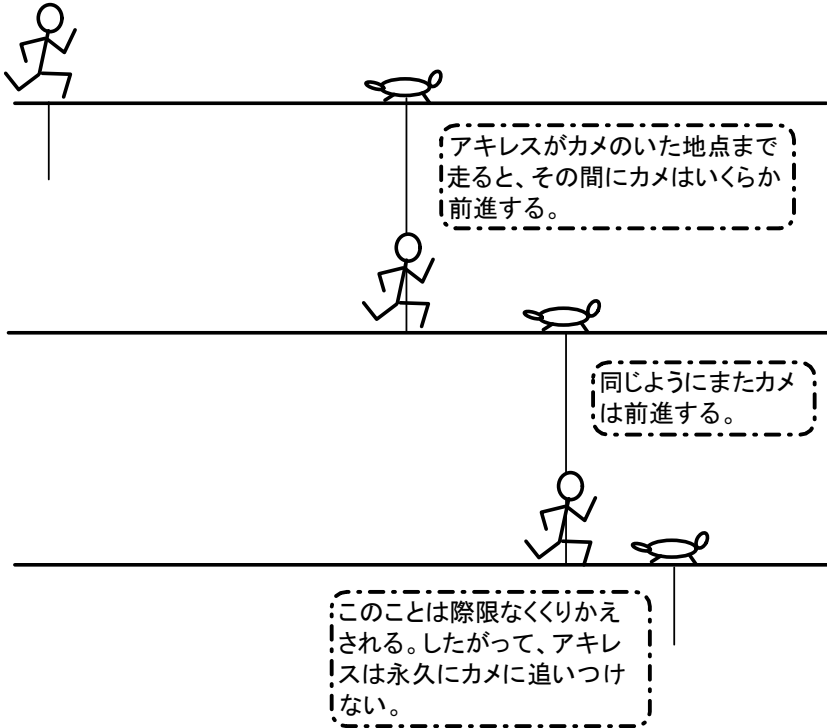
「方程式だといたって簡単なのに、算数で考えると難しいなんて、面白い問題ですね。マチ子先生、興味深い話って何ですか？アキレスとカメの話ですか？」

めずらしく大貴の方から話を持ち出した。

「そう、アキレスとカメという話。古代ギリシャの時代にゼノンという哲学者がいてね、こういう問題を出して当時の数学者たちを悩ませたそうよ。紀元前300年ころの話。アキレスというのはアキレスけんなんて名前が付くくらい足が速いので有名な人、一方カメはのろい代表。さっきの大人と子どもの競争みたいに、アキレスがカメを追いかけるの。アキレスがスタート時にカメがいた地点に到達するにはいくら足が速いと言ってもいくらか時間がかかる。カメはいくらのもろいと言ってもその時間にいくらか前進する。すると、アキレスはまたカメがいる地点に到達するまでに時間がかかり、カメはその間に前進する。これは際限なくくりかえされるから、アキレスはいつまでたってもカメに追いつけない、という話なんだけど、その当時の数学では、際限なくくりかえすこと、つまり無限にとい

アキレスとカメ (ゼノンのパラドックス)

注: パラドックスとは、常識に反すること、常識では考えられないことだが、簡単には否定できないようなこと。



時計の長針が短針を追いかける問題も、長針が最初に短針がいた位置(4時)に来るまでにかかる時間を考えたり、その間に短針がどの位置まで動くかを考えたりすると、上のパラドックスにはまってしまう。(高校で習う数学で考えれば解けないことはないが)

う言い方にうまく対応できなかったのね」

「どのように対応するんですか？」

「高校で習うんだけど、大貴君なら勉強すれば理解できるはずよ。でも無限のことを理解するには、その前に中学や高校で習う数学を勉強する必要があるの」

大貴が下を向いて何やら考える素ぶりになった。

「無限って面白そうですね」

私は大貴を励ます意味を込めて言った。

「そうね、大貴君なら数学の勉強を1人でもやっていけるわよ」

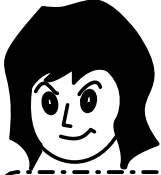
マチ子先生は大貴と私の意をくんで言ってくれたのだ。

大貴が顔を上げて「はい」と答えた。

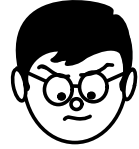
「じゃあ、次の問題に行くわよ。これから出す問題は高校の数学で習うことだけど、高校生でないと理解できないとか、高校で習う数式を使わないと解けないとか、そういうことはないから大丈夫。ある年齢にならないと運転免許が取れない、なんていうのとは違うから・・・」

そう言ってマチ子先生は両腕を前に伸ばし、自転車のハンドルを握るようにして、右手をグイグイッとひねった。バイクに乗る仕草だ。そう言えば駐車場に赤いオートバイがあった。マチ子先生が笑い、私たちは説明などなくてもすぐにマチ子先生が言ったことの意味は分かった。

「早い時期からこういう問題で頭を使って、いろいろな考え方ができるようになることは、とてもいいことよ。じゃあ、問題を言うわね。バス通りからこの住宅地に入るとすぐに公園があるわね。あそこから我が家へ来る歩き方は何通りあるか。ただし、回り道せずに



「無限」のふしぎ



1を3でわると、

$$\frac{1}{3} = 0.33333333333333333333333333333333 \dots (\text{この先無限に続く})$$

この両辺に3をかけると、

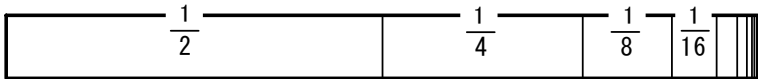
$$1 = 0.99999999999999999999999999999999 \dots (\text{この先無限に続く})$$

ふしぎな等式になる？

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097 \dots (\text{この先無限に続く})$$

$1.41421356237309504880168 \cdot \times 1.41421356237309504880168 \cdot = 2$
無限に続くものどうしのかけ算が2になる！？
(というより、そのような数を $\sqrt{2}$ とした)

長さ1のようかんを、1日目は半分、次の日は残りの半分、その次の日はまた残りの半分、…と食べると、永久に食べきれないが、



式で表すと、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \dots = 1$$

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots (\text{この先この調子で無限に続く})$$

このとき、

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

また

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$$

また

$$S = 1 - (1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\dots) \text{ より、} S = 1 - S \text{ であり}$$

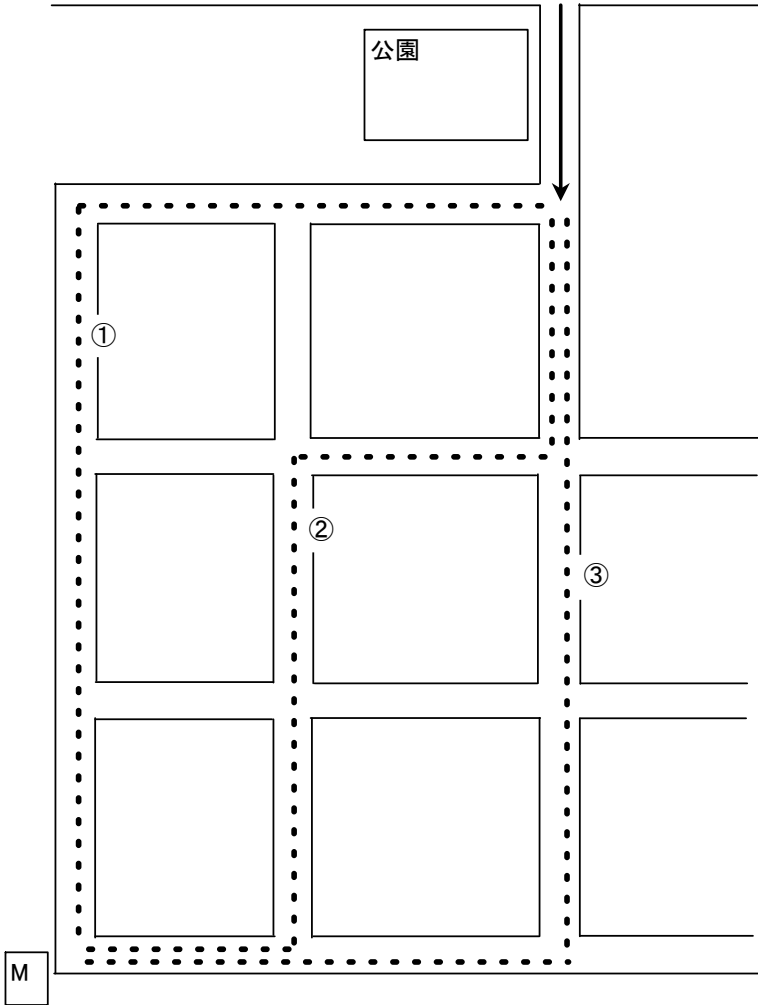
$$2S = 1 \text{ よって、} S = 1/2$$

Sはいろいろな値になる？

最短の経路で来るようにしなければいけません、という問題。何通りあるかという答えを出すのは、あなたたちにとってそれほど難しくはないはずよ。この問題はいろいろな考え方ができるはずだから、腰をすえて取り組んでみるといいわ」

私たちはマチ子先生の家からの帰り道、いつもは通らないコースを四つ角を確認しながら歩いた。道はたて3本と横4本で表のようにきちんとなっていて、どこをどう歩いても回り道をしない限り最短経路になり得る。マチ子先生の問題の意味はすぐに理解できた。

①、②、③ はどれもマチ子先生の家(M)への最短経路。このような行き方は何通りあるか



13) 最短経路は何通りあるか *

公園の前からマチ子先生の家への通りを図に描いてみた。たてに3本の線、横に4本の線で表ができた。回り道にならないようにこの線をたどって、右上から左下へ行く行き方が何通りあるか数えればよい。それほど多くはなさそうだ。

通りの線をなぞっていくと、最初のうちはいいが、何回もくりかえしていくと、なぞった線が増えていって、すでに通った行き方がまだなのかがわからなくなる。行き当たりばったりでいくのはよくない。何かうまい数え方の規則を作らなければいけないことはわかる。もしもたてと横の線がもっと多い場合だったら余計にそうだ。

「10通りだね」

腕を組みながらテーブルの周りをうろうろしていた大貴が言った。

「何かうまい数え方を思いついたの？」

私の声掛けには無関心といった感じで椅子に座ると、何やら鉛筆を動かし始めた。『まったく。にくたらしいやつめ』私が肩をつつきながらもう一度言うと、やっところちらに顔を向けた。

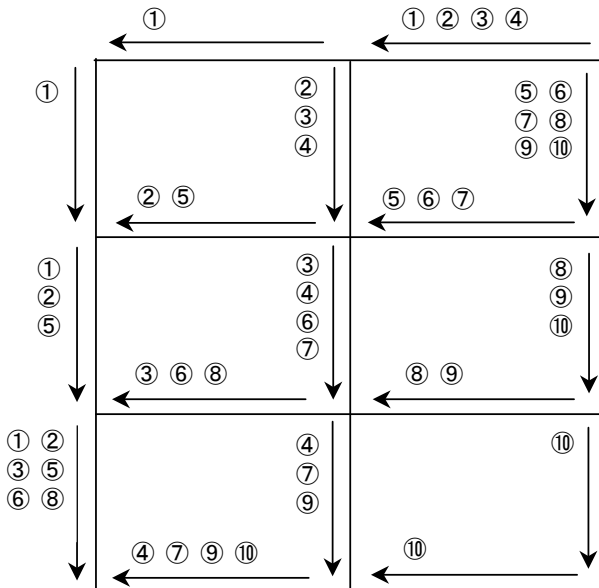
「横へ行くのを優先するんだよ」

大貴はそう言うと、図の上を鉛筆でなく指先でなぞっていった。横へ行くかたてに進むかの分岐点で、まだ横へ行っていないなら横へ行く。それが横を優先するという意味だ。確かに規則的に数えられることがわかる。大貴の言った通りに指でなぞると、直前の行き方さえ意識すればよいので間違いは避けられる。確かに10通りになった。

「うん、確かにそうね。横を優先するとうまく数えられる。たて

横(←)を優先する行き方

道が別れるところで、常に横方向へ行くことを優先する。



経路が確定したあとも何回通過するかわかるように、すべて書きこんだ。

たてを優先しても、同じようにできる。

優先でも同じね」

私がそう言うと、大貴はすでにほかのことを考えているようだった。大貴の手もとをのぞき込むと、横棒2本とたて棒3本を一列に並べたものをいくつも書いている。それを見て私も思い当たった。どの行き方も、横が2回たてが3回になっている。考えてみれば当たり前のことだ。これらはみな最短経路として道のりが一致する。『そうか、図をなぞるのではなく、横とたてを記号にして並べればいいのか』

ところが、大貴が記号を並べるのを見てみると、地図とは関係ないことをやっているように思える。

「ねえ、その5個の記号を並べてどうするの？」

大貴はちょうど思いついたことを私に言いたかったようで、すんなり答えた。

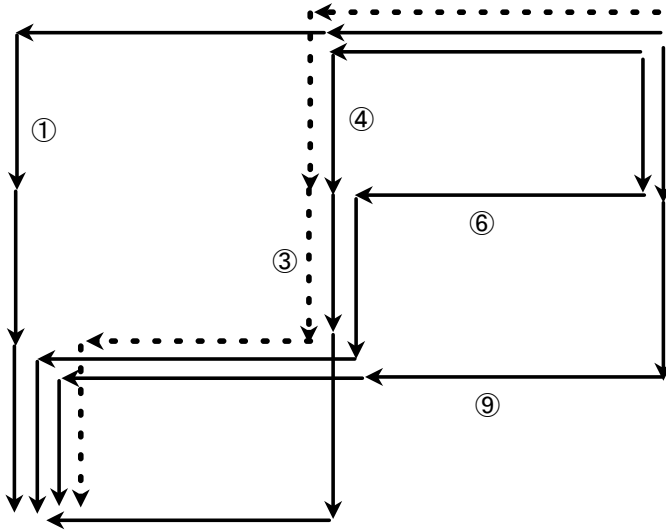
「この5個の記号を適当に並べるとき、それに対して1つの行き方になるんだよ。だから、この5個の記号の並び方だけ行き方があるんだ」

「そうか。最短経路の問題が、横棒2本とたて棒3本の並び方の問題になったのか。じゃあ、やっぱり横を優先して並べればいいわけね？」

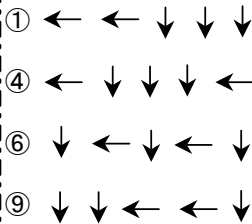
「横をA、たてをBにするよ。2個のAと3個のBの5個の文字を辞書にあるような順番で並べればいいんだ」

「えっ？」『なんでそんなことを思い付くんだ！』

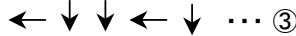
大貴は私への説明のために、横をA、たてをBにして説明したのだ。2つの記号をAとBにして、辞書にあるように考えるのなら、確かにわかりやすい。これなら間違いなく数えられそうだ。



どの行き方も、横(←)2回、たて(↓)3回になっている



逆に、横2個とたて3個を並べると、
1つの行き方になる



$$\boxed{\text{地図上の行き方の数}} = \boxed{\text{横2個とたて3個の並べ方の数}}$$

横をA、たてをBとして、A2個とB3個の計5個の文字を辞書式に並べると、次の10通りができる。

AABBB、ABABB、ABBAB、ABBBA、BAABB
 BABAB、BABBA、BBAAB、BBABA、BBBAA

これですべてすっきり解決したはずなのに、大貴は何やらまだ考え込んでいる。じゃましてはいけないから、私はそっとしておくことにした。

大貴は立ち上がり、「わからない、わからない」と言って歩き始めた。何がわからないのか、私にはさっぱりわからない。結局、大貴が分からないままマチ子先生のところへ行くことになった。

* * * * *

マチ子先生は、大貴が考えた A と B を並べる方法を「素晴らしい」とほめたが、大貴は不満そうだ。そして、何がわからないのか話した。

「たまたま横の線が2個だったので、A 2個と残りがBでうまくいきましたが、もとの地図で、横方向の道もたて方向の道ももっと多くなった場合に、どういうふうに計算すればいいかわかりません」

マチ子先生は大貴の話を聞いて、感心したように深くうなずいた。「そうね、辞書式に並べて数えたら大変だしね。でも大貴君、やっぱりそこまで考えたのね。多分そうだろうと思っていたわ。じゃあその話はあとでゆっくりするとして、その前に片方が2個の場合の別の考え方を1つ話すわね。この考え方ならもう一方がいくら多くても簡単に計算できるわ。それに割と身近にあることだから知っておくといいわ」

マチ子先生はそう言って、リーグ戦の表の話をした。そう言えば新聞のスポーツ欄などでよく見る表だ。何チームかで総当たりの試合をするときに、左と上にチーム名を書いて、たてと横がぶつかったマスに両者の対戦を横のチームから見た結果として書きこむ。対角線の上下のマスはこの対角線に関して対称の関係になるから、試

5個のものから2個選ぶ(組み合わせ)

1	2	3	4	5
A		A		

上の表のどこどこ(2か所)を選んでAを入れるか(残りはB)。

1と2、1と3、…、4と5

の10通り。

これは、右のような5チームによるリーグ戦の表の、○のか所と同じだけある。

	1	2	3	4	5
1		○	○	○	○
2			○	○	○
3				○	○
4					○
5					

リーグ戦の試合数の計算

どのチームも自分以外の4チームと対戦する … 5×4

これは同じ試合を2回数えているから、 $5 \times (5 - 1) \div 2$

(別の考え方)

○のマスは 5×4 から、対角線が引かれた5個のマス

引いて、2で割ったものである … $(5 \times 5 - 5) \div 2$

一般に、 n 個のものから2個取り出す組み合わせの数は、次の式で計算できる。

$n \times (n - 1) \div 2$ あるいは、 $(n \times n - n) \div 2$ (2つの式は同じ式)

合数としては上半分を見ればよい。すると、5チームの場合、10試合になる。

「最短経路の問題は5個のものから2個を選ぶ選び方は何通りあるか、ということね。これは高校で習う『組合せ』なの。大貴君の考えたA2個とB3個を並べるのも、5か所のうちのどの2か所をAにするかというように考えれば、組合せになるわ」

大貴が目を見開いてうなずいている。

「 n かける、かっこ n 引く1、わる2ですね」

「その通り。 n チームで総当たり戦をすると、試合数は今大貴君が言った式になるわ」

私は、今大貴が言った式の n に5を入れてみた。5かけるかっこ5引く1、わる2。確かに10になる。そして改めてリーグ戦の表を見る。左に書かれたチームから見て、自分の対戦相手は4チームであり、対角線の上半分になるから、5かける4わる2だ。

「この式があれば、チーム数が多くても簡単に計算できますね」

私が言うと、マチ子先生がうなずきながら答えた。

「真喜さん、その通りよ。それで大貴君がわからないと言ったのは、たとえば7個から3個を選ぶといったような場合ね。リーグ戦の表はもちろん使えないし、辞書式に並べたとしても何通りあるかをうまく数え切れないわね。今のような式がすぐにはできないから。大貴君がそこまで考えるんだったら、やっぱり順番通り『順列』の話からするべきだったわ」

マチ子先生はそう言って『順列』の話を始めた。A、B、C、D、Eの5個の文字を一行に並べる並べ方は何通りあるか。1番目は5通りで、そのそれぞれに対して2番目は4通り。以下同じように3

順列(いくつかのものを一列に並べる)並べ方の数

A、B、C、D の 4個を一列に並べる $\cdots 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通り

A、B、C、D、E、F の 6個うちの 3個を一列に並べる $\cdots 6 \times 5 \times 4 = 120$ 通り

7個のものから3個選ぶ(組合せ)の数を考える

A、B、C、D、E、F、G

3個選ぶ(組合せ)
これが a 通りあるとする。

A
C F

たとえば、A、C、F を選んだとして、この 3個を一列に並べる並べ方は、

ACF、AFC、CAF、CFA、FAC、FCA

これから、の 6通り(式: $3 \times 2 \times 1$)

A、B、C、D、E、F、G の 7個からまず 3個選び
それらを並べる並べ方は、
 $a \times (3 \times 2 \times 1)$ 通り \cdots (P)

A、B、C、D、E、F、G の 7個のうち 3個を
並べる並べ方は、
 $7 \times 6 \times 5$ 通り \cdots (Q)

(P)と(Q)は同じことだから、
 $a \times (3 \times 2 \times 1) = 7 \times 6 \times 5$
よって、
 $a = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$ 通り(7個から 3個取り出す組合せの数)

番目、4番目、5番目を考えれば、式は5かける4かける3かける2かける1の120通りになる。これは分かりやすい話で私にもすぐに納得できた。

そして、マチ子先生は7個から3個を取り出す場合を例に『組合せ』の説明をした。組合せの数は直接は出すことはできなくて、順列の考えをうまく利用して解く。これもまあ理解できた。

大貴はさっそく最初の最短経路の問題を、今の組合せの考えで計算した。5個から2個取り出すとして、分子が5かける4、分母が2かける1で10だ。

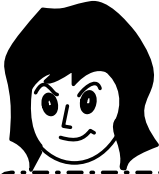
確かにマチ子先生が言うように、組合せも順列も身の回りに関係することで活用できそうな話だ。

そして、次の問題だ。

「サッカーの試合なんかで、コインを投げてコートを決めたりするわね。表が出るか裏が出るかは誰もが2分の1ずつだと了解しているからああいう決め方ができるわけね。サイコロを振って目が偶数か奇数かはやはり2分の1ずつだし、1の目が出るのは6分の1だというのも、別に学校で習わなくてもみんなが認め合えることよね。ところで確率が分数の数値で表せるということは、計算できるということなんだけど、計算するうえで注意しなければならないことがあるから、それだけは確認しておきましょう。10円玉が2枚あって、同時に放ったとき表と裏が1枚ずつになる確率は・・・、どお、すぐわかるかな？」

目の出方は2枚とも表、2枚とも裏、表と裏が1枚ずつの3通りだから・・・、と考えていると、マチ子先生が続けた。

「最初だから説明するわね。正解は3分の1じゃなくて4分の2、



順列と組合せ

(ここはちょっとむずかしいです)



<順列>

異なる5個のもの(たとえば、A、B、C、D、E)を一列に並べる並べ方

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ (通り)}$$

異なる7個のものから3個取り出して並べる並べ方

$$7 \times 6 \times 5 = 210 \text{ (通り)}$$

一般に、

異なる n 個のものを一列に並べる並べ方

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \text{ (通り)}$$

異なる n 個のものから r 個取り出して並べる並べ方

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \{n-(r-1)\} \text{ (通り)} \quad (\text{注: } r \text{ 個のかけ算})$$

これを、 ${}_n P_r$ であらわす。(注: PはPermutationの頭文字)

$${}_n P_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \{n-(r-1)\}$$

n 個すべて並べる場合は

$${}_n P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (\text{注: } n! \text{ ともかく})$$

<組合せ>

異なる7個のものから3個取り出す取り出し方(組合せ)

$$\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \text{ (通り)} \quad (\text{注: } \frac{{}_7 P_3}{3!})$$

一般に、

異なる n 個のものから r 個取り出す取り出し方

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \{n-(r-1)\}}{r \times (r-1) \times (r-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1} \text{ (通り)}$$

これを、 ${}_n C_r$ であらわす。(注: CはCombinationの頭文字)

$${}_n C_r = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \{n-(r-1)\}}{n \times (r-1) \times (r-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} \quad (\text{注: 分母分子に } (n-r)! \text{ をかけた})$$

つまり2分の1。表と裏が1枚ずつの場合を1通りとすると間違い。たとえば10本中に1本当たりくじがある場合で考えるとわかりやすいわ。くじの引き方は当たりかはずれの2通りだから当たる確率は2分の1というのは間違いというのはすぐ気づくでしょ？」

「そうか、見た目は同じでも出方としては区別しなければいけないんだ」

大貴がうなずきながら言い、私もうっすら納得した。

「10円玉と100円玉で考えるとわかりやすいでしょ？裏と表が1枚ずつになる確率は10円玉が2枚のときと変わらないはずだから」

「そうか、はずれの9本に1から9の数でも書いて区別すればいいんだ」

2人のやり取りで私にもすっかり納得できた。

「そうね、なれるまでは見た目は同じ場合もすべて区別して考えるといいわ。じゃあ問題ね。本題は電卓を使うような計算が絡むんで、次回一緒にやることにして、練習に1つ出すから考えてみて」

そう言ってマチ子先生が出したのは次のような問題だった。

『サイコロが1個ある。我が家の家族4人が順に1回ずつ振って、4人のうちの少なくとも1人が1の目を出すというのは起りやすいことかどうか』

起りやすいという言い方があいまいだが、確率が2分の1より大きければ起りやすいと言える。つまり確率が2分の1より大きいか確かめよ、ということだ。確率の問題というのはこういうものかということを知り、改めて理解した。計算してみなければわからないということだ。

2枚の硬貨を投げて表と裏が1枚ずつになるすべての場合

表、裏の出方が

オ オ

(表 2枚)

オ ウ

(表と裏が1枚ずつ)

ウ ウ

(裏 2枚)

の3通りと考えるのはまちがいの3通りと考えるのはまちがいの。

2枚の硬貨を異なるものにすると考えやすい(4通りある)。

オ オ

オ ウ

ウ オ

ウ ウ

確率では、必ずこのように全ての起こり得る場合を考える

10本中に当たりが1本含まれるくじびきから1本引く場合

くじを1本引くとき、当たりかハズレのどちらかだから2通りと考えてしまうと、当たる確率が2分の1になってしまう(明らかにおかしい)。

そこで、次のようにハズレを区別すると、引き方が10通りあり、当たる確率が10分の1であることがわかる。

ハズレ
1

ハズレ
2

ハズレ
3

ハズレ
4

ハズレ
5

ハズレ
6

ハズレ
7

ハズレ
8

ハズレ
9

当たり

14) 誕生日はなぜ重なるのか *

天気予報での降雨確率 20 パーセントという言い方や、私が学校へ行く途中にある信号はどうやら 3 回に 2 回の割合で、つまり 3 分の 2 の確率で赤になる、なんていうのも身近にある確率の話だ。降雨確率は現在の気象状況から過去のぼう大なデータに照らし合わせて確率を計算しているのだろう。あとからマチ子先生に教わったことだが、過去のデータや実験結果から推測する確率を統計的確率というそうだ。たとえばある花の種を一定の条件の中で 100 個まいて何個発芽するか、つまり発芽する確率は、サイコロの目の場合のように計算できない。つまり統計的確率に頼るしかない。信号で待たされる確率は、たとえば経験的に 100 回のうち何回止められたかで推測できるが、赤とそれ以外の時間がわかれば簡単に計算できる。計算で求められる場合を数学的確率というのだそうだが、計算で出せるのなら数学的確率で求めるのがいいに決まっている。

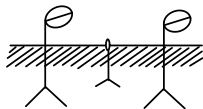
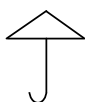
サイコロの問題だが、これもひまに任せて家族 4 人で何回も何回も繰り返せば（もちろん 1 人でもできるが）、ある程度の確率としての数値が見えてくるだろう。だが、ここはできることなら計算で求めたい。

大貴がいつものように独り言を言うかのようにつぶやいた。

「少なくとも 1 人が 1 の目を出すということは、かなり複雑でいろいろなケースがある。誰か 1 人だけが 1 の場合、2 人だけが 1 の場合、3 人だけが 1 の場合、そして 4 人とも 1 の場合だ。しかも例えば 2 人が 1 の場合、どの二人が 1 なのかもある必要があり、すべての場合を計算するとなると、かなり大変なことになりそうだ」

そして、さらに次のように続けた。

計算で求められる確率と計算では求められない確率



(計算だけでは求められない＝統計的確率) (計算できる＝数学的確率)

雨が降る確率や種が発芽する確率は、サイコロの目の出方のように計算で求めることはできない。

<統計的確率の例>

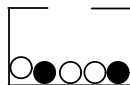
- 天気予報で雨が降る確率
- まいた種が発芽する確率
- 野球選手が次の打席でヒットを打つ確率
- 産まれる子牛がメスの牛である確率

<数学的確率の例>

- サイコロを振って1の目が出る確率
- 宝くじで1等が当たる確率
- いつも歩く道の信号で待たずに渡れる確率
- どこに落ちるかわからない宇宙からの物体が都市部に落ちる確率

<計算で求める例題>

箱の中に5個の球が入っていて、そのうちの2個が当たりである。AとBの2人がこの順に1個ずつ取り出すとき、A、Bそれぞれが当たる確率を求める。



● 当たり

ただし、Aが取り出した球は元に戻さない。

1) Aが当たる確率 $\frac{2}{5}$

2) Bが当たる確率
Aが当たってBが当たる確率 $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \dots \textcircled{1}$

AがはずれてBが当たる確率 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10} \dots \textcircled{2}$

①、②より、Bが当たる確率は $\frac{2}{5}$ (注: AとBが当たる確率は同じ)

「あとは全員が1の目以外の場合だ」

大貴のつぶやきはおおむね私にも理解できたが、特に最後の『全員が1でない場合』というのが気になった。

「少なくとも1人が1の目を出すというのは、4人の場合から1人の場合まで数えきれないくらいいろいろなケースがあるけど、最後の1つは一通りだ。確率というのは、すべての場合の確率をたせば1になるはずだから、1人も1の目を出さない場合を計算すればいいんだ。それを1から引けばいいんだ」

私がまだあいまいにしか理解できていないと思ったか、大貴は何やら紙に図を描き始めた。起こりうる5つの場合を書いて①から⑤とし、最初の4つを丸で囲み（図のA）、最後の1つ（図のB）を含めた全部を円で囲んでそれを1にした。私にも大貴が言わんとしていることがわかってきた。

「そうか、4人とも1の目を出さない確率を計算すればいいんだ」

私がそう言った時には、大貴は6分の5という分数を4回かけた式を書き、電卓で計算を始めた。 $(5 \times 5 \times 5 \times 5 \div 6 \div 6 \div 6 \div 6)$

「0.48…になるよ。つまり、2分の1より小さい。だから少なくとも1人が1の目を出す確率が2分の1より大きくなるんだ」

「そうか、誰かしらが1の目を出すことの方が起こりやすいんだ」

「試しに7人の場合で計算すると、少なくとも1人が1の目を出す確率が0.7以上になるよ」

大貴は満足そうに計算した紙を自分の顔の前に掲げて言い、隣にいたホロのしっぽを指でくるくる巻き付けるようにした。ホロは迷惑そうに逃げだした。

* * * * *

4人がサイコロを振った場合に起きること

4人が1個のサイコロを順に振って、それぞれ1の目が出るか出ないかに着目すると、次のような場合が考えられる。

- ① 4人が1の目を出す
- ② 3人が1 " "
- ③ 2人が1 " "
- ④ 1人が1 " "
- ⑤ 0人が1 " " (1の目が1人もいない)

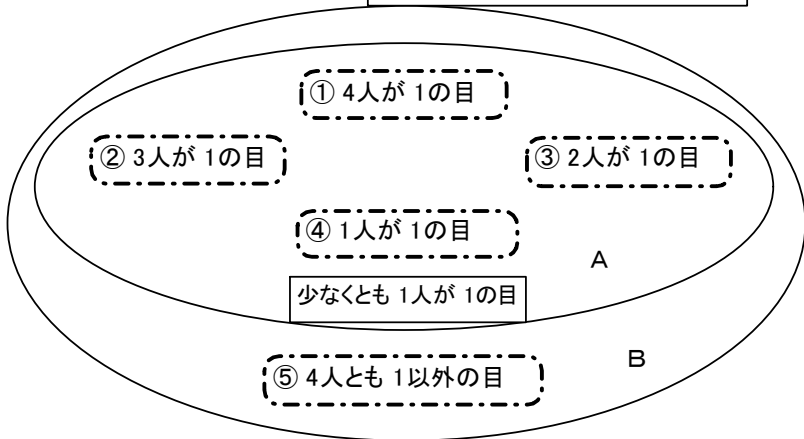
4人のサイコロの目の出方は上の5通りある。

確率を計算する際は、②、③、④については4人のうちの誰が1の目なのかを考えなければならない。

たとえば、②は4人のうちのどの3人が1の目で、残る1人は2から6の何の目か、というように。特に③は大変そう。

大貴君が考えた集合の図

4人がサイコロを振って起こり得る全ての場合



集合Aの確率と集合Bの確率をあわせると1

⑤は人を区別しなくてすむから計算が楽

大貴がマチ子先生に話すと、マチ子先生は「全くその通り」と言い、いつものほめ言葉に続けて「じゃあ、本題ね」と言って始めた。「かつて高校の教師をしていた頃、クラスの生徒のいろいろな書類を作っていて、生年月日を記入することがあったんだけどね、誕生日が一致することがよくあったの。2組とか3組とか、時には3人が一致したりね。いつも奇妙だなと思ったものよ。365通りも誕生する日があるというのに45人でどうして?って。でもあるときこのことに関する確率の話を知って、そうだったのかと納得したの。それで2人にも試しに計算してみようということで話すの。電卓を使って計算するわよ。じゃあ何をするか言うわね。まず人が何人かいて誕生日が一致する確率はどうなるかを考えてみましょう。1人目は何日でもかまわないから365分の365つまり1ね。ここからが問題よ。誕生日が一致する確率を計算したいんだけど、一致する方で考えるとうまくいかない。あなたたちはもうサイコロの問題で気が付いたようだけど、一致するというのは、2組とか、3組とか、時には3人がとかあるわけだから、起こり得るすべての場合でやろうとしたら際限ないものになってしまうわね。だからここでもことごとく一致しない場合で考えましょう。その裏返しは少なくとも1組の一致があるということになるわね。それで2人目以降は自分より前の人と一致しない確率を計算していくの。2人目は1人目の人の誕生日以外の日であればいいから365分の364。3人目は前の2人以外の日だから365分の363。以下この繰り返しね。つまり、1に365分の364をかけ、次に365分の363をかけ、365分の362をかけ、というように続けていって、その値が2分の1より小さくなるのは何人目かを求めるの。誕生日がことごとく異なる確率が2

マチ子先生が経験したこと

No	氏名	生年月日	
1		10月5日	
2		3月7日	
3		1月16日	
4		3月23日	
5		7月10日	※1
6		9月1日	
8		7月10日	※1
16		8月22日	※2
30		8月22日	※2
45		4月31日	

誕生する日は、1月1日から12月31日まで365日(365通り)あるはずなのに、45人のクラスで、誕生日が一致するということが必ずと言っていいほど生じた。一致が2組あったり、時には3人が一致するというのもめずらしいことではなかった。
どうしてか？

分の1より小さいということは、少なくとも1組が一致する確率が2分の1より大きい、つまり起こりやすいということになる。これもサイコロの場合と同じね」

私たちはさっそく計算することにした。マチ子先生が電卓を2個用意してくれたが、大貴が打ち込み、私が隣で間違いがないか確認することにした。かける分子の数が1ずつ減っていき、わる分母の数はずっと365のままだ。気を付けてやらないとまちがえそうだ。

大貴が「1かける364わる365、かける363わる365、・・・」と声を出しながら打ち込んでいく。かなり大変な作業になりそうだ。いつ0.5より小さくなるのか見当もつかない。

はじめのうちは、0.9・・・となかなか小さくならない状態が続いたが、分子が355で0.8・・・になり、次第に減り方が大きくなっていった。そして、ついに分子が343になったとき0.5より小さくなった。私は人数を数えてみた。

「出ました。23人です。23人目で0.5より小さくなりました」

まず大貴が驚いた。

「えーっ！23人で？」


「そう、計算は正しかったみたいね。なかなか大変な計算だったでしょ？23人で0.5より小さくなるので正解よ。ただし、確か0.49という微妙な値よね。でも理論上は、23人いれば、誕生日が重なることの方が起こりやすいというわけね」


「計算してみないとわからないものですね」


私がそう言っているとマチ子先生がうなずきながら話した。


「電卓だとあまりにも計算が大変だけど、実はパソコンに入っている関数電卓を使うと、たちどころに計算できるのよ。試しに45人


23人の誕生日がことごとく異なる確率

1人目  $\frac{365}{365}$ 1人目は何日でもかまわない


2人目  $\frac{364}{365}$ 2人目は1人目の人以外の日

3人目  $\frac{363}{365}$ 3人目は前の2人以外の日

4人目  $\frac{362}{365}$ 4人目は前の3人以外の日

5人目  $\frac{361}{365}$ 5人目は前の4人以外の日

...

23人目  $\frac{343}{365}$ 23人目は前の22人以外の日

23人の誕生日がことごとく異なる確率は

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \frac{361}{365} \times \dots \times \frac{343}{365} = 0.49 < 0.5$$

よって、23人では一致しない確率が1/2より小さくなるから、一致する確率の方が大きくなる。

パソコンの関数電卓で計算してみる(Windows 10の場合)

『電卓』を起動し、『関数電卓』にする(左上の三本線)

365 とすると、365の階乗(1から365までのかけ算)を計算

365 23 とすると、365の23乗(365を23回かける)を計算

$$365 \text{ } \div 342 \text{ } \div 365 \text{ } 23 \text{ } = 0.4927\dots$$

注: 365! ÷ 342! で、365 × 364 × 363 × … × 343 を計算したことになる。

で計算すると、0.06になるわ。つまり、重なりが起きる確率は94パーセント」

「へーっ！」

今度は私が奇声を発してしまった。

「それじゃあ、まちがいなく起きますね。確率って、計算の仕方さえわかれば、いろいろ面白いことにつかえそうですね」

大貴も感動している。

「そうね。じゃあ、もう1つ紹介しようかしら。これも有名な話でとても興味深いわよ」

大貴が身を乗り出した。私にわかる話ならいいけどと思いつつ私も身を乗り出す。

「少し大きめの紙とマッチ棒を1本用意して、紙にマッチ棒の長さの幅で線を何本も引く。なるだけたくさん引いた方がいいわ。これで準備は終わり。あとはただひたすらあることをくり返すの。あることというのはね、マッチ棒を紙に向かって投げて——できるだけでたらめに——、マッチ棒を投げた回数とそのとき線と交わった回数を記録していくの。投げる回数は多いほどいいんだけど、あまりにも単純で飽きてしまうわね」

マチ子先生が笑いながら一息入れると、大貴が待ちきれないというように口を開いた。

「何が出るんですか？」

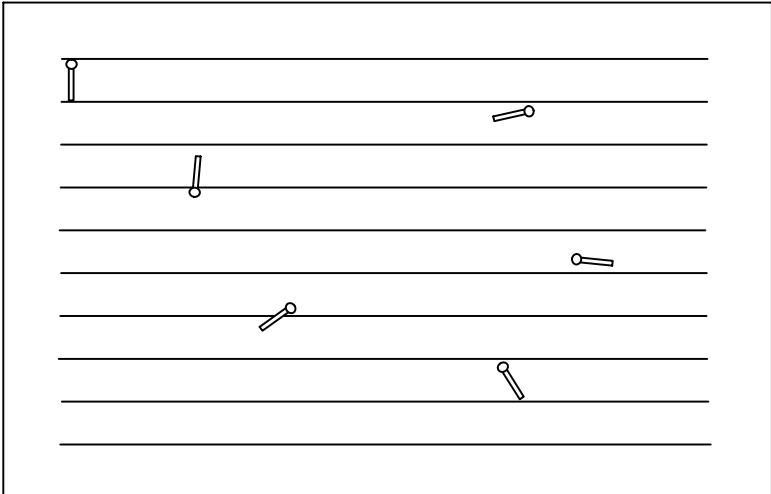
「円周率。つまり、3.14・・・というあの値よ」

「うへーっ！」

大貴がまたすっとんきょうな声を発した。「統計的確率というのですか？」

ビュフォンの針＝確率を利用して円周率 π を計算する

大きめの紙にマッチ棒の長さの幅で線を引く



この紙に向かって、できるだけたばめにマッチ棒を投げる。
投げた回数と、そのときマッチ棒が線と交わった回数を記録する。

これをできるだけ多くくりかえす。

投げた回数の総数を N 、そのうちで線と交わった回数を R として、
 $2 \times N \div R$
を計算する。

「そう、でもこれは数学的に計算できる確率なの。サイコロの1の目が出る確率のように計算できて、 π の値になることもわかるの。ただし、残念ながらこれは高校で習う数学の知識が必要よ。大貴君、もしも興味があるなら高校で習う数学教えてあげてもいいわ。運転免許なんかと違って、なにも小学生がやってはいけないなんてことではないから」

大貴が頭に手をあて嬉しそうな顔をしてうなずいている。

「はい、 π の値になることがわかる数学を勉強したいです」

私にはわからないが、高校の数学を学べば大貴の関心を抱く範囲も広がり、理解も深まるのだろう。

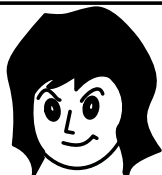
私たちは家に帰ってさっそくやってみた。2人で紙の両側に立ち、交互に投げ方をいろいろ変えてくりかえした。

どちらにするか迷うこともあったが、50回投げて31回線と交わった。マチ子先生に教わった式に入れて計算すると、3.23だった。まずまずではないか。3.14に近づく気配を感じる。2人で引き続きもう50回繰り返してみた。100回中65回。計算値は3.08だ。試しに計算してわかったが、交わった回数を1回増やしたり減らしたりすると0.04くらいの違いになる。やはり、もっと回数を増やす必要があるのだろうと思った。

大貴はもう別のことを考えているようだった。

「この先500回、1000回繰り返せば、3.14という値に近づいていきそうだね。サイコロを何回も振れば、1の目が出る回数が6分の1に近づくみたいに」

「そうね。大貴は本当はどうしてこのマッチ棒の実験が π の値に近づくのか知りたいんでしょ？」



確率の例題



当りが2本、はずれが5本のくじ引きがある。AとBの2人がこの順で1本ずつ引く。引いたくじは元に戻さないものとする。

① Aが当って、Bも当る確率(Bが引く時は、当り1、はずれ5)

$$\frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$$

② Aが当って、Bがはずれる確率(①と同じ)

$$\frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{21}$$

③ Aがはずれて、Bが当る確率(Bが引く時は、当り2、はずれ4)

$$\frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{21}$$

④ Aがはずれて、Bもはずれる確率(③と同じ)

$$\frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{10}{21}$$

注1: 全ての場合の確率をたすと1になる。

注2: Bが当る確率は①+③で、Aが当る確率と同じになる。

注3: 少なくとも1人が当る確率は①+②+③。

これは $1 - \text{④}$ に等しい。

引いたくじを元に戻す場合

① Aが当り、Bも当る確率 $\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

② Aが当り、Bがはずれる確率 $\frac{2}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{49}$

③ Aがはずれ、Bが当る確率 $\frac{5}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{10}{49}$

④ Aがはずれ、Bもはずれる確率 $\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{25}{49}$

「うん」

「今度、マチ子先生に相談してみたら」

大貴の目が輝いたのを感じた。体がウキウキしたように見える。大貴がマチ子先生に出会えたことが本当に幸運だったと、改めて感じた。

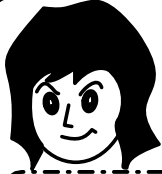
マチ子先生は、多くの生徒たちと接し、子どもの成長を見てきたわけだし、ましてやご自身の息子さんが大貴に似た特徴のある子だったわけで、この先も大貴の精神的な成長の面に関してもよい影響を与えてくれるに違いない。

残念ながら私は数学が得意でないけど、マチ子先生が大貴との関りが続けてくれる間は大貴に付き合おうと思う。

マチ子先生の息子さんは、大貴同様あまり学校へは行けなかったそうだけど、今は大学で先生として働いているとのこと。恐らく息子さんにとって一番合った仕事、そして生活の場を見つけることができたのだろう。

この先大貴がどのように考え、どのように生きていくかはわからないけど、あの子に欠けた部分、自分ではどうにもならないところを、一番近い者として、もうしばらくは相談相手になり、必要なときはサポートしていこうと思う。

<完>

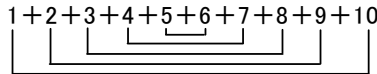


1+2+3+...+n のうまい計算法



$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

の、うまい計算の仕方を考えます。



のように2個ずつ組み合わせると、11が5組できるので、

$$11 \times 5 = 55$$

のように計算できることがわかります。

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11$$

のように、数の個数が奇数個の場合、上のやり方では中央の6が取り残され、

$$12 \times 5 + 6 = 66$$

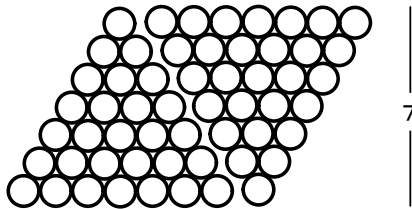
のように計算することになります。

そこで、次のように工夫して考えると、偶数個か奇数個かを気にしないで計算できます。

$$1+2+3+4+5+6+7$$

の例で考え方を示していますが、7をnで置き換えれば一般の場合の計算式になります。

$$\text{—— } 8 \leftarrow (7+1) \text{ ——}$$



$$1+2+3+4+5+6+7 = \frac{7 \times (7+1)}{2} = 28$$

$$1+2+3+\dots+(n-1)+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$